角運動量と力積のモーメント

岐阜物理サークル・村田憲治 murata@straycats.net

コマはなぜ倒れないのか？，皿回しの皿はなぜ落ちないのか？，自転車の車輪はどうしてあんな予測もつかない動きをするのか？ 等々，回転する物体の運動は不思議に満ちており，私たちを魅了します。難しそうに見える回転運動ですが，これを理解するために必要な最も基本的な法則は何なのか考えてみましょう。

■ 「運動量と力積」と「角運動量と力積のモーメント」を対応づけて考えよう

「運動量と力積の関係」は 物理の教科書でおなじみですが，「角運動量と力積のモーメント（角力積と呼ばれることもある）の関係」は，これとキレイに対応しています。

物体の運動量が $\vec{p}$（$=m\vec{v}$）から，$\vec{p}'$（$=m\vec{v}'$）に変化したとき，その運動量の変化 $\Delta\vec{p}$ は，$\vec{p}'-\vec{p}=\Delta\vec{p}$ ですが，この $\Delta\vec{p}$ は物体が受けた力積 $\vec{F}\Delta t$ に等しい（運動方程式）ので，

$$\begin{cases}\vec{p}+\Delta\vec{p}=\vec{p}' \\ \Delta\vec{p}=\vec{F}\Delta t\end{cases}$$

となります。これが「運動量と力積の関係」です。

一方，「角運動量と力積のモーメントの関係」は，

$$\begin{cases}\vec{L}+\Delta\vec{L}=\vec{L}' \\ \Delta\vec{L}=\vec{N}\Delta t\end{cases}$$

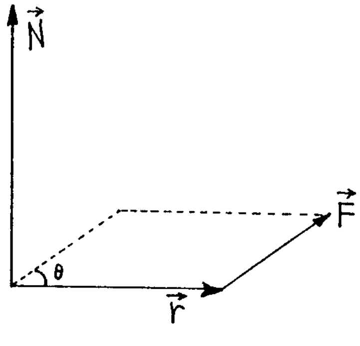
となっており，「運動量と力積の関係」とまったく同じ形をしています。
ここで，$\vec{L}$ は初めの角運動量，$\vec{L}'$ はあとの角運動量，$\Delta\vec{L}$ は角運動量の変化，$\vec{N}$ は力のモーメント，$\vec{N}\Delta t$ は力積のモーメントという物理量です。

■力のモーメント $\vec{N}$ と角運動量 $\vec{L}$

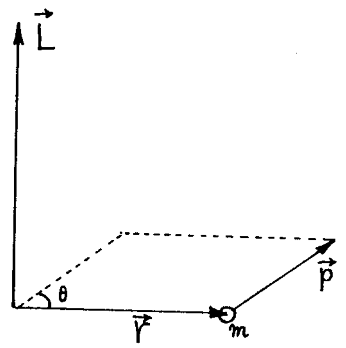
力のモーメントとは，「物体をある点Oのまわりに回転させようとする力の効果」を表す物理量で，「物体に力 $\vec{F}$ がはたらいているとき，この力の作用点の位置ベクトル $\vec{r}$ と力 $\vec{F}$ とのベクトル積（外積）$\vec{r}\times\vec{F}$ を点Oのまわりの力のモーメント $\vec{N}$ とする」と定義されています。

$\vec{r}\times\vec{F}$ すなわち $\vec{N}$ はベクトル量で $\vec{r}$ を $\vec{F}$ の方へまわすのと同じ向きにまわした右ネジの進む向きを持っています。

（$\vec{N}$ の大きさは $rF\sin\theta$ ）



また，角運動量は「物体の回転の激しさ」を表す物理量で「運動量 $m\vec{v}$ を持つ質点の位置ベクトル $\vec{r}$ と運動量 $\vec{p}$ （$= m\vec{v}$）とのベクトル積（外積）$\vec{r}\times\vec{p}$ を点Oのまわりの角運動量 $\vec{L}$ とする」と定義されています。$\vec{r}\times\vec{p}$ すなわち $\vec{L}$ はベクトル量で $\vec{r}$ を $\vec{p}$ の方へまわすのと同じ向きにまわした右ネジの進む向きを持っています。（$\vec{L}$ の大きさは $rp\sin\theta$）



そうすると，先ほどの式を見るときは，

運動量 $\vec{p}$ $\longleftrightarrow$ 角運動量 $\vec{L}$

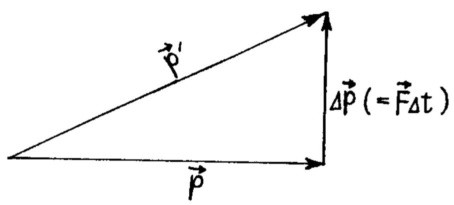
力 $\vec{F}$ $\longleftrightarrow$ 力のモーメント $\vec{N}$

力積 $\vec{F}\Delta t$ $\longleftrightarrow$ 力積のモーメント $\vec{N}\Delta t$

と対応をつけながら見ていけばいいわけです。

■ 角運動量 $\vec{L}$ を持つ物体に，$\vec{L}$ に垂直な力のモーメント $\vec{N}$ を加えると，$\vec{L}$ は回転する

運動量 $\vec{p}$ を持つ物体に，$\vec{p}$ に垂直な力積 $\vec{F}\Delta t$ を加えると，$\vec{p}$ は大きさと向きを右図のように変え，$\vec{p}'$ となります。

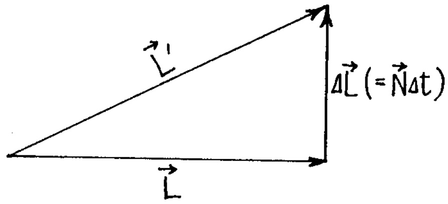


つまり，$\vec{p}+\vec{F}\Delta t=\vec{p}'$ （ベクトルの和）です。

もし，力 $\vec{F}$ が，物体の運動量 $\vec{p}$ に対して常に垂直であるなら $\vec{p}$ は大きさを変えないで向きだけを変えます（等速円運動）。

これと同じことが，回転する物体にも起こるのです。つまり，こうです。

角運動量 $\vec{L}$ を持つ物体に，$\vec{L}$ に垂直な力積のモーメント $\vec{N}\Delta t$ を加えると，$\vec{L}$ は大きさと向きを右図のように変え，$\vec{L}'$ となります。



つまり，$\vec{L}+\vec{N}\Delta t=\vec{L}'$ （ベクトルの和）です。

もし，力のモーメント $\vec{N}$ が，物体の角運動量 $\vec{L}$ に対して常に垂直であるなら $\vec{L}$ は大きさを変えないで向きだけを変えます。

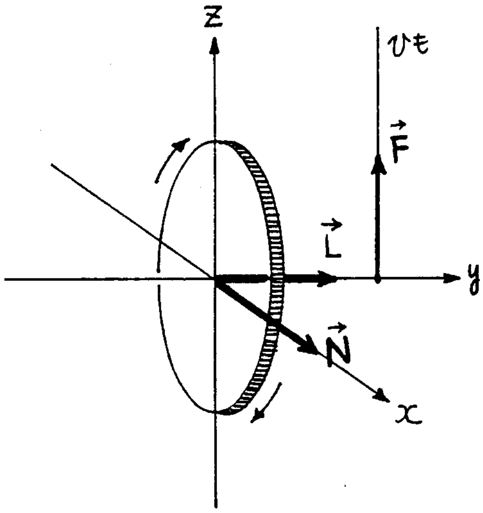
これで，回転する物体の不思議な動きを解明する準備ができました。さっそく〈自転車の車輪〉を回して理屈通りに動くか調べてみましょう。

■ 理屈通りに車輪は動く！

まず，図のように回転する自転車の車輪の角運動量 $\vec{L}$ は，$+y$ 方向を向いています。

この車輪にひもをつけて図のようにつるすわけですから，車輪には $+x$ 方向の力のモーメント $\vec{N}$ が加わります。

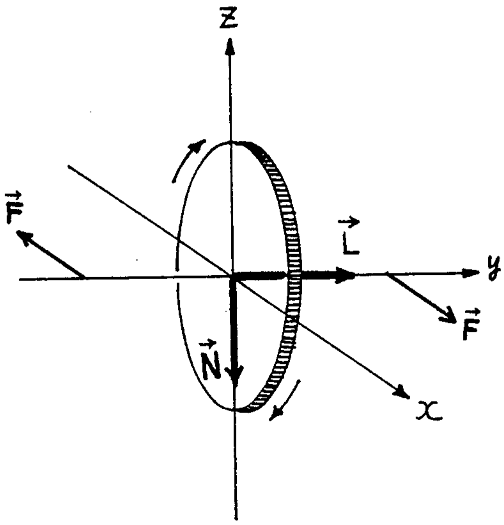
そうすると，Δt 秒間に $\vec{N}\Delta t$ の力積のモーメントが $\vec{L}$ に付け加わる（$\vec{L}+\vec{N}\Delta t=\vec{L}'$）わけですが，力のモーメント $\vec{N}$ は角運動量 $\vec{L}$ に対して常に垂直ですから，$\vec{L}$ は大きさを変えないで向きだけを変えます。つまり，上から見ると車輪の軸が時計回りに回転することになります。本当にそうなるでしょうか。やってみましょう！



つぎに，車輪を逆向きに回転させて，同じようにひもでつるしたらどうなるでしょうか。車輪の動きを予想できますか？ 実験したらその予想通りの動きをするでしょうか。

それでは次に，車輪につけた２つのハブステップを両手で持ち，自転車に乗ってハンドルを右に切るように力 $\vec{F}$ を加えてみましょう。この力（偶力）のモーメント $\vec{N}$ は $-z$ 方向を向きます。$\vec{L}$ はどのように向きを変えるでしょうか。

初めて自転車に乗り始めた子どもがうまくカーブできないで転倒してしまう理由は，このように「右に曲がるために右にハンドルを切る」ところにあります。



右に曲がるためには右にハンドルを切ってはいけないのです。右にハンドルを切ると，車輪は左に倒れてしまいます。右に曲がるには，車輪を右に倒すのです。そうすると，「角運動量と力積のモーメントの関係」から，車輪の軸は自然に右に回転していくのです。私たちは自転車に乗るときにこの法則を知らないうちに使っているのですね。

ついに〈独自ドメイン〉を取得！
岐阜物理サークル（のらねこ学会）ホームページへおいでください

http://www.straycats.net/