２次元衝突もなかなか面白い

石川幸一・村田憲治

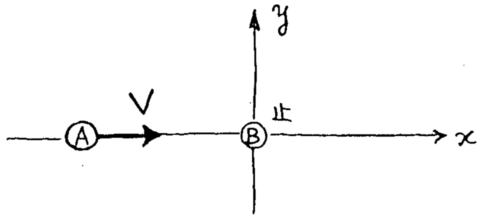
　ここのところサークルでは「衝突と座標変換」の話が流行しています。今回の例会では石川さんが，『２次元衝突も座標変換で考えてみよう』，村田が『２次元衝突とはねかえり係数』というレポートを出して，みんなで議論してみました。まとめて村田が報告します。

　まずは，石川さんのレポートから，

■ 地上から見て解くと，衝突後の速度ベクトルの終点は円周上のどこかにくる

　質量の等しい２つの粒子Ａ，Ｂがあり，粒子Ａがx方向に$\vec{V}$で進み，静止した粒子Ｂに衝突する。

　衝突後のそれぞれの速度を$\vec{V}_1$，$\vec{V}_2$とすると，その向きは様々になるが，それでも ある制限がつく。



（１）完全弾性衝突（$e=1$）の場合……地上から見て解くと

$$\begin{cases} \text{運動量保存より} \quad \vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2 & \cdots① \\ e=1\text{より} \quad \left|\vec{V}_2-\vec{V}_1\right|=\left|\vec{V}\right| & \cdots② \end{cases}$$

であるが，実際は成分表示をとって計算しなければならないので，

$\vec{V}_1$ =（V_{1x}，V_{1y}），$\vec{V}_2$ =（V_{2x}，V_{2y}）とおくと，①より

$$V=V_{1x}+V_{2x} \quad \cdots③$$
$$0=V_{1y}+V_{2y} \quad \cdots④$$

②の両辺を２乗して　$\left|\vec{V}_1\right|^2+\left|\vec{V}_2\right|^2-2\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2=\left|\vec{V}\right|^2$

成分を入れて　$V_{1x}{}^2+V_{2x}{}^2+V_{1y}{}^2+V_{2y}{}^2-2\left(V_{1x}V_{2x}+V_{1y}V_{2y}\right)=V^2 \quad \cdots⑤$

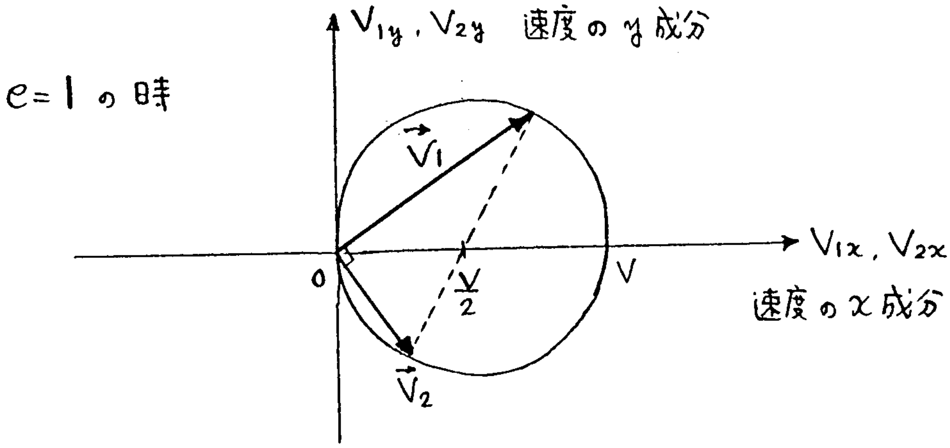
③，④より　V_{2x}，V_{2y}を消去すると，⑤の左辺は

$$V_{1x}{}^2+\left(V-V_{1x}\right)^2+V_{1y}{}^2+\left(-V_{1y}\right)^2-2\left[V_{1x}\left(V-V_{1x}\right)+V_{1y}\left(-V_{1y}\right)\right]$$

となるので，

これを整理すると最終的には　$\left(V_{1x}-\dfrac{V}{2}\right)^2+V_{1y}{}^2=\left(\dfrac{V}{2}\right)^2 \quad \cdots⑥$

したがって速度$\vec{V}_1$ =（ V_{1x}， V_{1y} ）をベクトルで示すと その終点は次の円の上のどこかにくることになる。（次ページの図）



同様に粒子Ｂの速度も成分で求めると⑥と同様に

$$\left(V_{2x}-\frac{V}{2}\right)^2+V_{2y}{}^2=\left(\frac{V}{2}\right)^2$$ …⑦　となり，同じ円の上にベクトル $\vec{V}_2$ の終点がくる。

ただし， $\vec{V}_1$ と $\vec{V}_2$ は 運動量保存（①式）からわかるようにベクトルの終点が円の中心から見てちょうど反対側にくる。

（２）一般に はねかえり係数 e の場合……地上から見て解くと

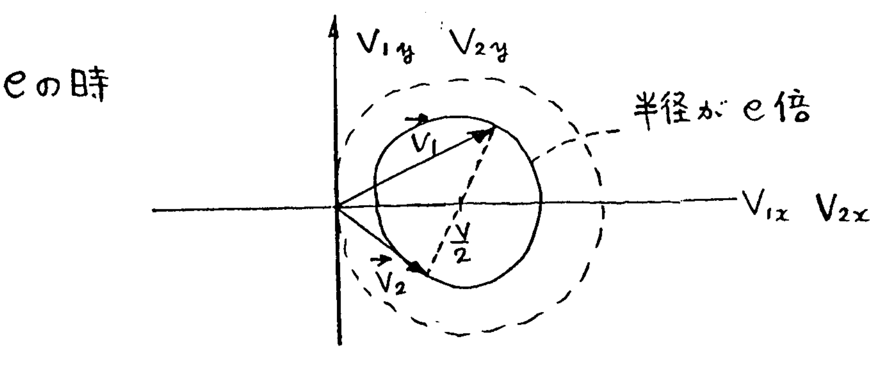
運動量保存より　$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$ …①

はねかえり係数 e より　$\left|\vec{V}_2-\vec{V}_1\right|=e\left|\vec{V}\right|$ …⑧

同様に成分表示にわけて求めるとよいが，実際の計算では⑧の左辺は（１）の場合と同じなので

結果だけ示すと　$$\left(V_{1x}-\frac{V}{2}\right)^2+V_{1y}{}^2=\left(e\frac{V}{2}\right)^2$$ …⑨

したがって，２つのベクトルは完全弾性衝突の場合に比べて半径が e 倍の円の上に終点が分布することになる。



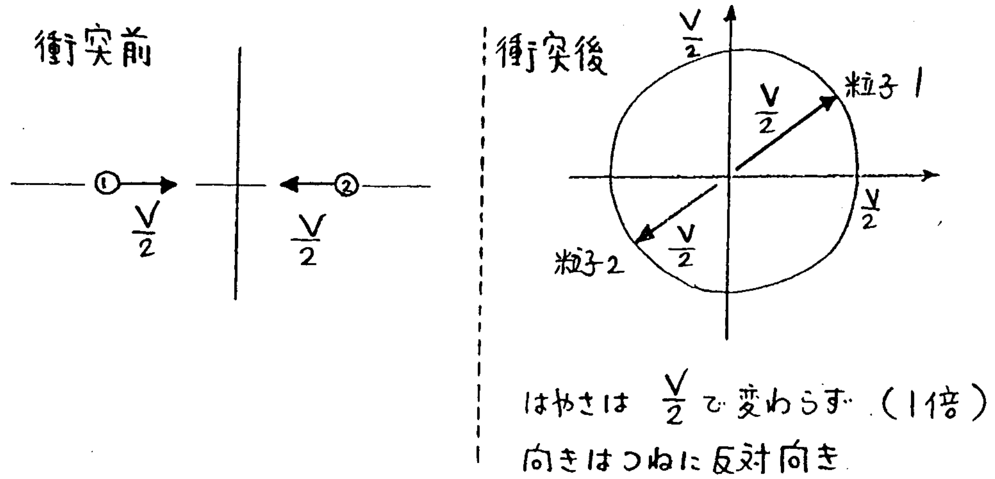
■ 重心系から見れば，もっとスッキリ解ける

以上，（1）と（2）は，いずれも地上から見て運動量保存と e の定義を忠実に使って求めたものであるが，ベクトルを成分にしたり，内積の計算などはめんどうだし，数学をどうしても使う。

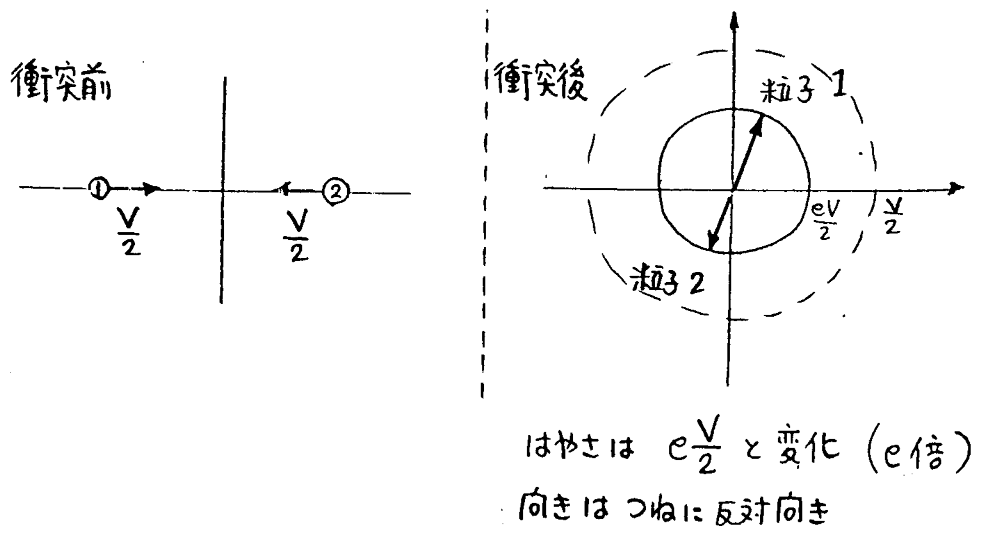
しかし，これを重心系（右へ $\dfrac{V}{2}$ の速さで移動）から見るとどのように見えるだろうか？

A，Bは $\dfrac{V}{2}$ の速さで正面衝突し，衝突後の速さはそれぞれ e 倍になって反対向きにはねかえるから，

（3）完全弾性衝突（$e=1$）の場合……重心系から見て解くと



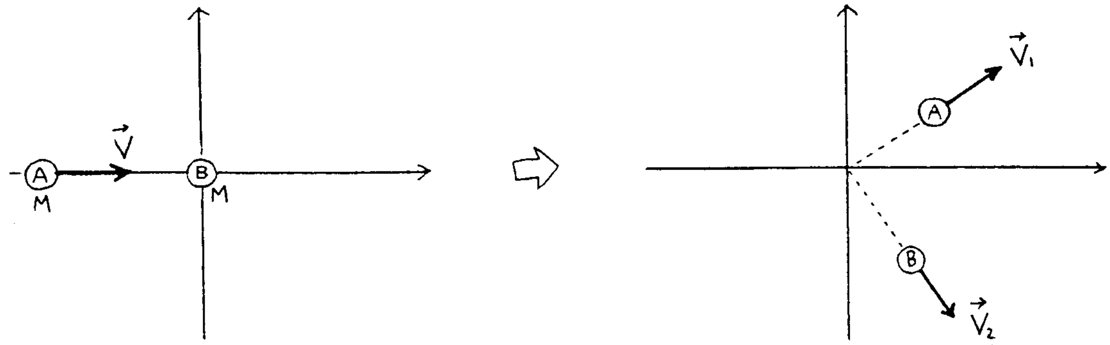
（4）一般に はねかえり係数 e の場合……重心系から見て解くと



地上から見た速度を求めるには，いま求めた速度に重心の速度（右へ $\dfrac{V}{2}$ ）を加えるだけでよい。すると（1），（2）の結果がすぐ得られる。

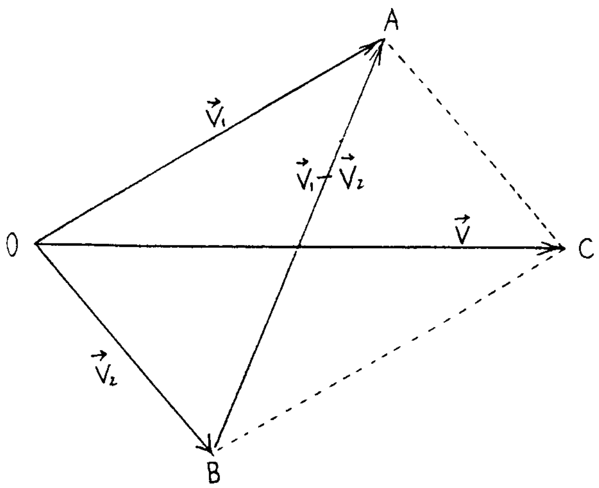
■ はねかえり係数は，平行四辺形の対角線の比に等しい

石川さんの（１），（２）の図を見ていて村田はこんなことを考えました。



上図のように，質量の等しい２つの粒子Ａ，Ｂが衝突したときを考えてみましょう。

$\vec{V}$，$\vec{V}_1$，$\vec{V}_2$ とはねかえり係数 e の間には $e=\dfrac{\left|\vec{V}_1-\vec{V}_2\right|}{\left|\vec{V}\right|}$ の関係があるのですから，これを図示してみると右図のようになります。



運動量保存　　$M\vec{V}=M\vec{V}_1+M\vec{V}_2$

つまり　　$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$

ですから，$\vec{V}$，$\vec{V}_1$，$\vec{V}_2$ で平行四辺形ができます。

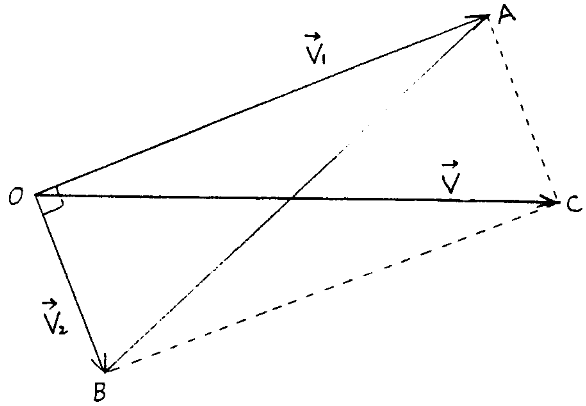
さて，そうすると $e=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{OC}}}$，つまり

はねかえり係数 e は衝突後のＡ，Ｂの速度 $\vec{V}_1$ と $\vec{V}_2$ でできる平行四辺形の対角線の比に等しい

ことがわかります。

■ 完全弾性衝突の場合は

完全弾性衝突（$e=1$）の場合の作図をしてみましょう。



$e=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{OC}}}=1$　ですから，$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OC}}$，

つまり，対角線の長さの等しい平行四辺形ができます。

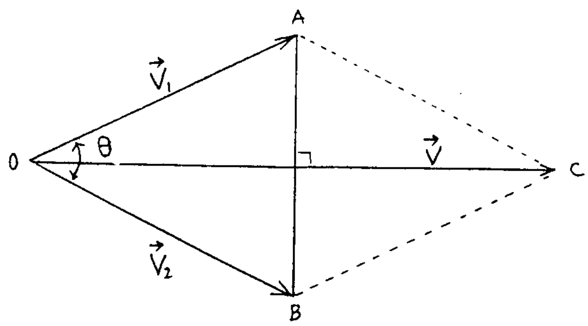
これは，〈長方形〉です。

$\vec{V}_1$，$\vec{V}_2$ のなす角（散乱角）は９０°です。これはよく知られた結果ですが，こんなに簡単に説明できるのです。もちろん向心衝突の場合の $\vec{V}_1$，$\vec{V}_2$ のなす角は１８０°です。（完全弾性衝突の場合は，９０°か１８０°になります）

■ 非弾性衝突の場合は

非弾性衝突（$0<e<1$）の場合，$\overline{AB}=e\cdot\overline{OC}$ ですから $\vec{V}_1$，$\vec{V}_2$ のなす角 θ は，$0<\theta<90°$ ですが θ には最大値があって，それは，$\vec{V}_1$ と $\vec{V}_2$ が下図のように〈ひし形〉なる場合です。

$$tan\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{\frac{1}{2}\overline{OC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OC}}=e$$ なので，



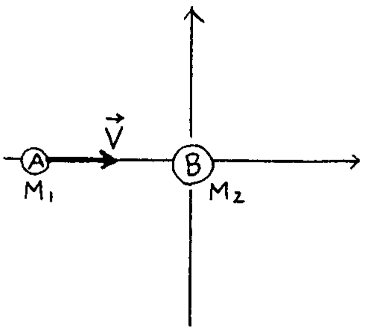
$$tan\theta=\frac{2\,tan\frac{\theta}{2}}{1-tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2e}{1-e^2}$$ となります。

たとえば，$e=0.5$ だと，$tan\theta=\frac{2\times0.5}{1-0.5^2}=\frac{1}{0.75}=1.33$ で，$\theta\approx53.1°$ です。

■ 質量の異なる２物体の衝突は美しくない…

でも，残念ながら粒子Ａ，Ｂの質量が異なる場合は，こううまくはいきません。

質量が異なると $\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$ とはならないからです。つまり，平行四辺形にならないのです。



こういう衝突の場合は，重心系に乗り換えて石川式の作図をする必要があります。

まず，重心の速度 $\vec{V}_G$ は $\vec{V}_G=\frac{M_1\vec{V}}{M_1+M_2}$ なので，

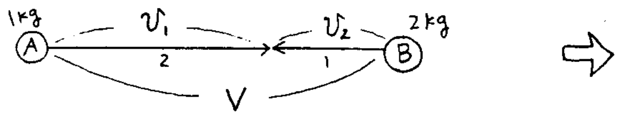
重心系で見たＡの速度 $\vec{v}_1$ は，$\vec{v}_1=\vec{V}-\vec{V}_G=\vec{V}-\frac{M_1\vec{V}}{M_1+M_2}=\frac{M_2\vec{V}}{M_1+M_2}$

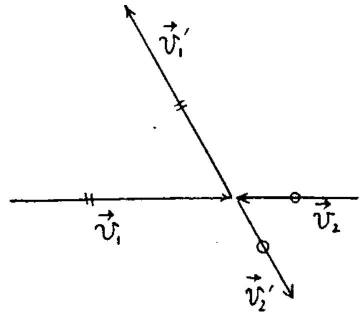
重心系で見たＢの速度 $\vec{v}_2$ は，$\vec{v}_2=0-\vec{V}_G=0-\frac{M_1\vec{V}}{M_1+M_2}=-\frac{M_1\vec{V}}{M_1+M_2}$ です。

たとえば $M_1 = 1$, $M_2 = 2$とすると, $\vec{v}_1 = \dfrac{2}{3}\vec{V}$, $\vec{v}_2 = -\dfrac{1}{3}\vec{V}$ となります。

衝突後の速さは, $v_1' = e v_1$, $v_2' = e v_2$ですから, 図を描くとは下のようになります。

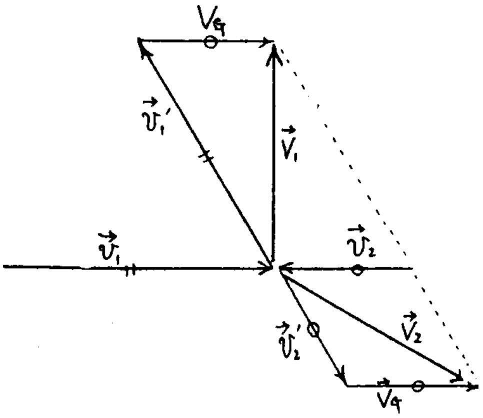
《$e = 1$の場合》

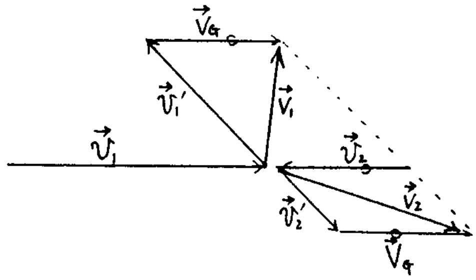




静止系の速度$\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$を求めるには$\vec{V}_1 = \vec{v}_1' + \vec{V}_G$, $\vec{V}_2 = \vec{v}_2' + \vec{V}_G$とすればよい。（下図）

《$e = 1$の場合》　　　　　　　　　　　　　　　　《$0 < e < 1$の場合》





質量の異なる２物体の２次元衝突も, こうして作図で解くことができますが, もう少しカッコいい図形になるといいんですがねえ。

のらねこ学会のホームページ開設！　http://www.mirai.ne.jp/~quz/

「『引退ねっ！』っと聞こえるインターネット」などという中高年の悲哀をうたった川柳を聞いたことがありますが, のらねこ学会もおそるおそるインターネットに進出してみました。まだ開設したばかりなので, 例会の様子を写した写真をペタペタ貼っただけのページしかありませんが, おヒマな方はのぞいてみてくださいね。

寄特な方からこんなメールをいただきました。

「ホームページ開設おめでとうございます。これから岐阜物理の近況が, サークルに所属しているかのようにわかるのですね。科教協の全国大会でしか知ることができなかったのですからこれは大事件です」

こんなことを言っていただけると恐縮してしまいます。精進しなくては…　　　【のらねこ学会ＨＰ管理人　村田】
