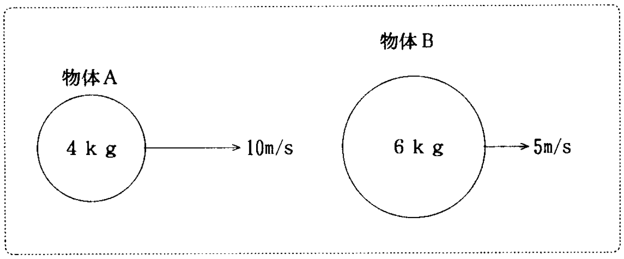
『石川式計算法』をv-tグラフで見ると

村田憲治（加納高校）

■ 衝突後のA，Bの速度は『石川式計算法』で簡単に求められる

前回のニュースの記事『反発係数eと力学的エネルギーの関係は？』の最後に「重心系に乗り移れば、〈運動量保存則の式〉と〈反発係数の式〉の連立方程式を解かなくたって衝突後のA，Bの速度は簡単に求められる」という石川さんの指摘があったことを書きました。（p. 3204）

これを僕は勝手に『石川式計算法』と名づけたのですが、まずこれを復習しておきましょう。



注 重心系の速度の求め方

$$v_G=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

$$=\frac{4\times(+10)+6\times(+5)}{4+6}$$

$$=+7\ \mathrm{m/s}$$

「静止系で見たこのA，Bの速度は、衝突後どうなるか。ただし反発係数eは0.5とする。」というのが問題なのですが、普通これは

$$\begin{cases}4\times(+10)+6\times(+5)=4v_A+6v_B\\[4pt] 0.5=-\dfrac{v_A-v_B}{(+10)-(+5)}\end{cases}$$

の連立方程式を解くものと相場が決まっています。

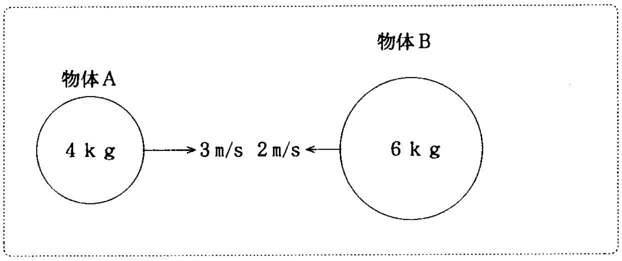
結果は、$v_A=+5.5$m/s，$v_B=+8.0$m/sとなります。

しかし、A，Bの重心系（静止系に対して右へ$v_G=+7$m/sで等速運動する座標系）へヒョイと乗り移って見ると下図のようになります。

【衝突前】

Aの速度は（+10）－（+7）で、+3m/sです。

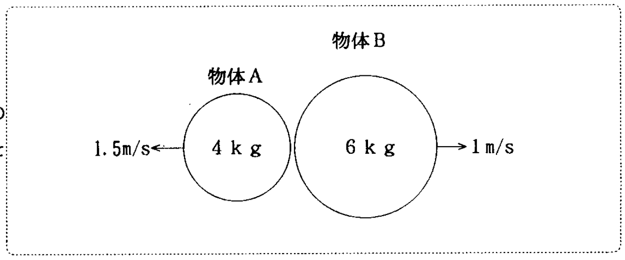
Bの速度は（+5）－（+7）で、－2m/sです。



【衝突後】

Aの速度もBの速度も、衝突前の速度の $-e$倍（つまり －0.5倍）になるのです。それぞれ －1.5m/s，＋1.0m/sということです。

静止系にもどせば それぞれ+5.5m/s，+8.0m/s 。簡単に計算できました。



さて、どうしてこんなにうまく計算できるのでしょうか。前回は、

重心系で見た衝突前のAの速度v_1-v_GをV_1，Bの速度v_2-v_GをV_2と表すことにし、衝突後はダッシュをつけて表すことにすれば、重心系では衝突前も衝突後もA，Bの運動量の和はゼロですから、

$m_1V_1+m_2V_2=0$ ……(1)　　また、反発係数eの定義式より

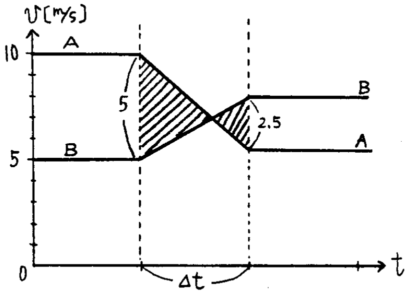
$m_1V_1'+m_2V_2'=0$ ……(2)　　$e=-\dfrac{V_1'-V_2'}{V_1-V_2}$ ……(3)

(1)〜(3)から、$e=-\dfrac{V_1'}{V_1}$，　$e=-\dfrac{V_2'}{V_2}$　は すぐに導けます。確かめてみてください。

などと冷たく言い放って(?)しまいましたが、その後 これは「$v-t$グラフを書いてみると直観的にピンとくる」ことに気づきました。（長い「前フリ」でしたなー。ハハハ）

■ $v-t$グラフだと相対速度の比、つまり反発係数eがよく見える

静止座標系から見たA，Bの衝突前後の速度をグラフにしてみると右図のようになります。

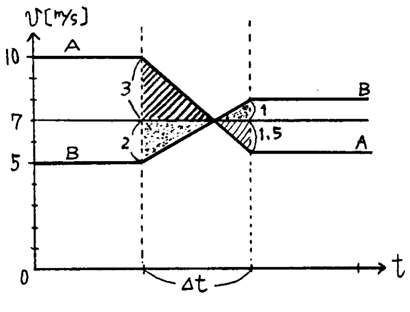


Δt秒の間、AとBは一定の力を及ぼしあって、それぞれ等加速度運動をしたとします。（この点について異議のある方もいらっしゃるかも知れません。これについては後述します）

さて、こういう図を見ると反発係数ｅ＝0.5が、スッと目に入ってきます。衝突前の相対速度は＋５m/s，衝突後は－2.5m/sですから、一目で$e=0.5$であることが分かります。

ここで注目しておいてほしいことがあります。図で斜線をつけた大小２つの三角形は相似で、相似比は２：１になっている、ということです。

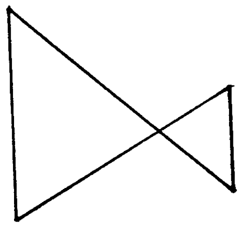
ここで、t軸に平行でA，Bの$v-t$グラフの交点を通る直線を引いてみましょう。（右図）



そうすると、４つの三角形ができますが、斜めに位置する大小２つの三角形（２組あります）は やはり相似で、相似比もさっきと同じ２：１になっています。

ところで、今引いた直線はv軸のどこを通るのでしょうか。実は、重心系の速度$v_G=+7$m/sの目盛りを通るのです。

なぜなら、この交点はA，Bが一体になっている瞬間ですから、その一体となった瞬間の速度はA，Bの重心の速度v_G＝＋７m/sになっているはずだからです。



この図から、重心系から見たとき、物体Aの衝突前後の速さの比も、物体Bの衝突前後の速さの比も、いずれも0.5になっていることが分かります。

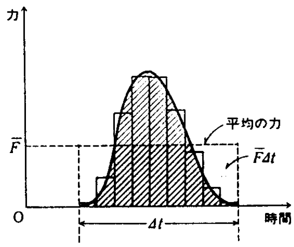
『石川式計算法』の意味は、こうして図にしてみると直観的に納得できると思うのですが、いかがでしょうか。

■ A，B間で及ぼしあう力は一定でなくたってかまわない

A，B間で及ぼしあう力が一定でないと、上の図形的な処理がうまくいかないようにも思えますが、どうなのでしょうか。この点について考えてみます。

実際、教科書によくあるように力は右図のように変化しますが、衝突中に力の大きさが変化しようがしまいが、運動量の変化は力積で決まるのですから、「力積の大きさが等しくなるような一定の力（平均の力）がΔt秒間にわたって働いたとして$v-t$グラフを描いたのだ」と考えればいいのではないでしょうか。

つまり、力積が同じであれば、結果（衝突後の速度）は同じですから、乱暴な言い方かもしれませんが「Δt秒の間のグラフはどう描いたってかまわない」のです。



力が変化する場合の力積

『石川式計算法』は、なかなか便利だと思いませんか？　「受験生も大喜び」(?)ですねー。