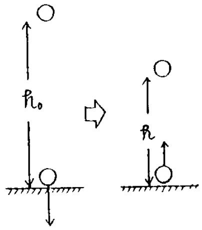
# 反発係数$e$と力学的エネルギーの関係は？

村田憲治（加納高校）

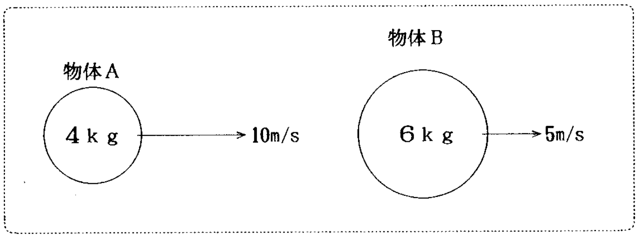
## ■ $e^2$の値は、エネルギーと関係があるのでしょうか



「高さ$h_0$[m]の高さからボールを自由落下させた。衝突後、ボールが到達した最高点の高さは$h$[m]であった。ボールと床面との反発係数を$e$とすると、$h_0$, $h$, $e$の間に成り立つ関係を式で表せ。」という、定番中の定番とも言える問題があります。
答はもちろん、$h=e^2h_0$ なのですが、先日 3年生の生徒さんが、
「先生、これって 衝突後の力学的エネルギーが、衝突前の力学的エネルギーの$e^2$倍になるってことでしょ。こういうことって一般的に言えるの？」
という質問をしてきました。ふむ、確かに この問題の場合はそうなっています。
でも一般的に〈衝突後の力学的エネルギー＝$e^2$×衝突前の力学的エネルギー〉である、と言っていいのでしょうか。いや、そうでもないようです。次のような２物体の衝突の場合では、上のようなことは言えません。

## ■ ２物体が衝突するとき、失われる力学的エネルギーは何Ｊ？

例えば、下図のような場合、




今の状態でA, Ｂが持っている力学的エネルギー（運動エネルギー）の和を計算すると

$\frac{1}{2}\times4\times10^2+\frac{1}{2}\times6\times5^2=$ ２７５Ｊ ですが、このあと衝突して、

もし、

① 反発係数$e=1$ なら、力学的エネルギーは ２７５Ｊ のまま（力学的エネルギーは保存される）ですが、

② 反発係数$e=0$ なら、力学的エネルギーは ２４５Ｊ になる。（エネルギーは $\boxed{30\text{J}}$ 失われる）

③ 反発係数$e=0.5$なら、力学的エネルギーは ２５２.５Ｊ になる。（エネルギーは $\boxed{22.5\text{J}}$ 失われる）

②の場合でも、２７５Ｊ全部が失われるわけではありません。ところで、この②, ③の計算をするとき 普通は、

運動量保存の式
反発係数の式
→ 衝突後のA, Bの速度 → 衝突後の力学的エネルギー → 衝突によって失われた力学的エネルギー

という手順で計算を進めますが、

衝突前の力学的エネルギーの値
反発係数$e$の値
→ 衝突後の力学的エネルギー

と、ストレートに行けないものなのでしょうか。先の生徒さんは、こういうことをしたいのでしょう。
そういえば、〈運動量〉と〈反発係数$e$〉は仲が良い（実利的にね！）のに、〈エネルギー〉と〈反発係数$e$〉の関係はモヤモヤしてて、スッキリしてないと思いませんか？

**エネルギーと反発係数$e$の関係をはっきりさせたい**

これが、彼の要求だと思われます。同感です。

## ■ どんな衝突でも（$e=0$でも）保存される力学的エネルギーがある

実は、A，Bを一体と考えたときの〈重心の運動エネルギー〉は、絶対保存されるのです。
ちょっと計算してみましょう。A，Bの重心の速度$v_G$は、

$$重心の速度 v_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

です（「剛体の重心」が教科書に復活したので教えやすくなりました）が、よく見てみると分子は、〈A，Bの運動量の和〉ではありませんか。AB間にはたらく力は内力ですから、衝突の前後でこれは保存されます。（運動量保存則！）
したがって、衝突の前後でA，Bの重心の速度$v_G$は一定です。つまり、重心は等速度運動します。
「運動量保存則とは、重心の慣性運動の法則に他ならない」と言えます。こういう視点で運動量保存則を見る教科書が１冊くらいあってもよさそうなものですが・・・。
さて、そうすると A，Bを一体と考えたときの重心の運動エネルギー、

$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_G^2$ は、衝突の前後で大きさが変化しないわけですから、

〈運動量保存の法則〉とは、〈重心の運動エネルギー保存の法則〉に他ならない

とも言えるわけです。先の例で計算してみる（右向きを正として）と、

$v_G = \frac{4\times(+10)+6\times(+5)}{4+6} = +7$m/s で、重心の運動エネルギーは、$\frac{1}{2}(4+6)\cdot 7^2 = \boxed{245\text{J}}$

となり、先の②の$e=0$の場合でも、確かにこの２４５Ｊは保存されていることがわかります。
では、失われた３０Ｊは何なのでしょうか？

## ■ 失われたのはA，Bの〈重心に対する運動エネルギー〉すなわち〈内部運動エネルギー〉なのだ

実は この３０Ｊは、A，Bの〈重心に対する運動エネルギー〉，すなわち 右に7m/sで等速運動する座標系（重心系）から見たA，Bの運動エネルギーの和なのです。
このことは、すでに『のらねこの挑戦』に載った石川論文で彼が指摘している（p. 171～p. 175）こと（買ってない人は早く買って読んでネ）なのですが、静止系で見た運動エネルギーの和は、２つの運動エネルギーに分離できるのです。

静止系で見た A，Bの運動エネルギーの和 ＝ 静止系で見た A，Bの重心の運動エネルギー ＋ 重心系で見た A，Bの運動エネルギーの和

これを〈内部運動エネルギー〉と呼びましょう

この〈内部運動エネルギー〉を計算してみると、

$$\frac{1}{2}m_1(v_1-v_G)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2-v_G)^2 = 中略 = \frac{1}{2}\frac{m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2$$

となり、この〈内部運動エネルギー〉とA，Bの〈重心の運動エネルギー〉との和をとってみると、確かに静止系で見たA，Bの運動エネルギーの和に等しくなることが確かめられます。

$$\frac{1}{2}m_1v_1^{\,2}+\frac{1}{2}m_2v_2^{\,2}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_G^{\,2}+\frac{1}{2}\frac{m_1\cdot m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2$$

先の例で〈内部運動エネルギー〉を具体的に計算してみると、

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4\times 6}{4+6}\cdot(10-5)^2=30\,\mathrm{J}$$

となり、先に計算した〈重心の運動エネルギー〉２４５Ｊと合わせると、静止系で見たＡ，Ｂの運動エネルギーの和、２７５Ｊとピッタリ一致します。

静止系で見たA，Bの運動エネルギー２７５Ｊ＝重心の運動エネルギー２４５Ｊ＋内部運動エネルギー３０Ｊ

となっているのです。②の場合の結果の意味がやっと分かってきました。

■ これで反発係数$e$とエネルギーの関係がはっきりした

反発係数の定義式は、 $e=-\dfrac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$

ですが、両辺を２乗してみましょう。

$e^2=\dfrac{(v_1'-v_2)^2}{(v_1-v_2)^2}$ これと、〈内部運動エネルギー〉の式を見比べてみてください。

そう、反発係数ｅとエネルギーの関係は、

$$e^2=\frac{\text{衝突後の内部運動エネルギー}}{\text{衝突前の内部運動エネルギー}}$$

となっていたのです。

具体的に③の場合で計算してみましょう。

$e^2=0.25$ ですから、〈衝突後の内部運動エネルギー〉は、３０Ｊ×0.25＝７.５Ｊ となります。

つまり、内部運動エネルギーは、２２.５Ｊだけ失われるわけです。

したがって、静止系で見たＡ，Ｂの運動エネルギーの和は、２７５－２２.５＝２５２.５Ｊ となります。

おっ、バッチリ出てきました。

これを使えば、運動量保存則の式と反発係数の定義式の連立方程式を解くなんていう、なんとなくまわりくどい方法をとらなくてもエネルギーの計算ができます。それに、なんとなく「見通しも良くなった」ような氣もするじゃありませんか。（そう思ってるのは 僕だけかな）

■ 生徒さんの はじめのアイデアはどこがマズかったのでしょうか

もうひとつ決着をつけておかなくてはならないことが残っています。床に自由落下させたボールのエネルギーの問題です。生徒さんは、

$$e^2=\frac{\text{静止系で見た衝突後の力学的エネルギー}}{\text{静止系で見た衝突前の力学的エネルギー}}$$

となっていると思いたがっていたようですが、一般的にはこういうことは言えません。では、なぜこの問題ではこういう結果になっているのかというと、ボールと床（地球）という２物体を一体と考えたときの重心の速度$v_G$が ほとんどゼロに等しいからです。$M\gg m$であり、$M$の速度は０と考えてよいから、重心の速度$v_G$は、

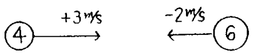
$v_G=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\dfrac{m\times v+M\times 0}{m+M}\fallingdotseq 0$ となります。

したがって、〈重心の運動エネルギー〉が ほとんどゼロですから、「床に衝突する直前にボールが持っている運動エネルギーは、すべて〈内部運動エネルギー〉である」と考えてよいからです。先の結論と矛盾するところはありません。この問題は、ごく特殊なケースだったというわけです。

## ■ 衝突後のA，Bの速度だって、座標系を乗り換えれば簡単に計算できる

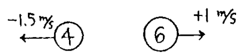
例会で 僕が以上のような話をしたところ、石川さんが「村田さん、今の話を聞いてて思いついたんだけど、こんな計算もできるヨ」と、黒板の前に立ちました。

「③の場合で説明するよ。重心系（静止系に対する速度は＋7m/s）から見ると衝突前のA，Bの速度はそれぞれ＋3m/s，－2m/sだよね。




それで、$e$＝0.5 だと、重心系で見た衝突後のA，Bの速度は それぞれ0.5倍の大きさで向きが反対になって（はねかえって）－1.5m/s，＋1m/s になるんだ。で、静止系に戻せば それぞれ＋5.5m/s，＋8m/s となる。もう、連立方程式なんか解かなくたっていいね。」

おお、これはすごいっ。A，Bまとめたエネルギーだけじゃなくて、それぞれの速度だって簡単に出せるんだ！（感動）




こりゃいつまでも静止系なんかにこだわってるのがバカバカしくなってきました。必要とあらば 座標系をヒョイヒョイ乗り換えるってのがカシコイやり方なんですね。

〈石川式計算法〉がうまくいくのは、重心系で見るとA，Bの運動量の和がゼロ（もちろん衝突前も衝突後も）だからです。確かめてみましょう。

重心系で見たA，Bの運動量の和＝$m_1(v_1-v_G)+m_2(v_2-v_G)$

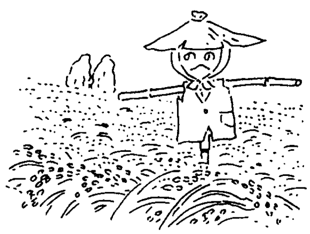
$$=(m_1v_1+m_2v_2)-(m_1+m_2)v_G$$
$$=0$$

代入 $v_G=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$

さて、重心系で見た衝突前のAの速度$v_1-v_G$を$V_1$，Bの速度$v_2-v_G$を$V_2$と表すことにし、衝突後はダッシュをつけて表すことにすれば、衝突前も衝突後もA，Bの運動量の和はゼロですから、

$$m_1V_1+m_2V_2=0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$m_1V_1'+m_2V_2'=0 \quad \cdots\cdots (2)$$



また、反発係数$e$の定義式より

$$e=-\frac{V_1'-V_2'}{V_1-V_2} \quad \cdots\cdots (3)$$

(1)～(3)から、$e=-\dfrac{V_1'}{V_1}$，　$e=-\dfrac{V_2'}{V_2}$ は すぐに導けます。確かめてみてください。

こうしてみると、「座標系を乗り換えて もう一度物理現象を見直してみる」ってことが いかに大切なことであるかがよく分かります。分かりきってたつもりの「2物体の衝突」で、これだけ楽しめるんですからねー。