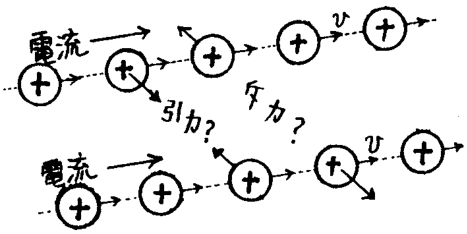
互いに平行に運動する2つの正電荷の間にはたらく力は？

村田憲治（加納高校）

■ 小川さんの『問題を発見する力』はスゴイ

9月の例会で、小川さんが面白い問題（パラドックス）を教えてくれました。詳しくは、小川さんも原稿を書かれることでしょうが、簡単に書くと『互いに平行に運動する２つの正電荷は、クーロン力で反発するのか、ローレンツ力で引き合うのか？』というものです。胸を突かれる思いがしました。小川さんは、しばしばこういうスゴイ問題を思いついてサークルを混乱(?)に落としいれるのです。まったく大したヒトです。



僕はそのとき、クーロン力とローレンツ力は相対論でつながっている（同じものだ）、という電磁気の本で昔に読んだかすかな記憶をたどりながら、『普通の導線（陽イオンと電子からなる）を流れる平行電流が引きつけあうのは、導線がローレンツ収縮を起こして帯電することによって生まれるクーロン力が原因であって、電流が作る磁場から力を受ける（ローレンツ力）なんて考えない方がいい。平行に運動する正電荷には相手になる負電荷（電子）が無いのだから、引力なんか生じない。正電荷同士の斥力だけだから、反発するはずだ。』などと、ずいぶんイイカゲンなことを言って（偶然、結論だけは正しかったのだけど）、さらに混乱を深める始末。

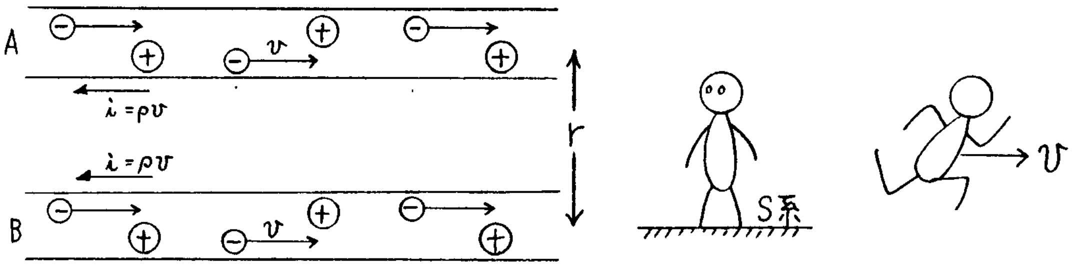
この例会では結論が出なかったのですが、家に帰ってからもこの問題が頭について離れません。基礎学力に欠ける僕は、まず家にある電磁気の本を調べはじめました。そしたら、『直線電流と平行に運動する正電荷が受ける力』というテーマを発見。ローレンツ収縮とかの式がズラズラ並んでいます。「よし、これだ」と、これを下敷きに数式をデッチ上げていくと、あらあら不思議、座標変換するとローレンツ力の一部がクーロン力に変わったりしながらも、電荷はどの慣性座標系から見ても（相対性原理）同じ大きさの力を受ける、というしごく当然の結果が出てくるではありませんか。なんだか「感動！」です。

あんまりうれしくて小川さんに電話すると、「うん、僕も計算してみて解ったよ！」という返事。彼も熱中して取り組んでいたようです。「石川さん（このときの例会は欠席）にも電話で話したら、『そりゃ、相対論でなんとかなるね』って言ってたよ。」とのこと。うん、石川さんならなんとかするはず！

小川さんとは電磁気学における相対論の位置づけなどについて大いに話が弾みました。こうやって物理の話で盛り上がれる仲間がいるってのはホントに幸せなことですよね。

電話の終わりに小川さんは、「このことは、サークルニュースに僕も書くし、石川さんもたぶん書いてくれると思うけど、村田さんも、もし暇があったら書いてくれないかなあ？　ひとつの問題について、いろんな人が書くっていうのもなかなかいいでしょ？」などとおっしゃる。人をノセるのもうまいねー。はい、書きます。計算が間違ってなきゃいいけど。小川さん，石川さんがついてるから大丈夫ですよね。

■ 平行電流が受ける力を静止した観測者が見ると



図のように、静止した座標系Ｓから、距離rだけ離れて平行に張られている電流の流れる２本の導線Ａ，Ｂを見て、Ａが単位長さあたりに受ける力を考えてみましょう。

導線内を電子は右方へ速度vで移動しており、導線内の電子による負電荷の線密度を$-\rho$とすると、陽イオンによる正電荷の線密度は$+\rho$となり（全体として電気的に中性になっている）、左方に電流$i=\rho v$が流れていることになります。

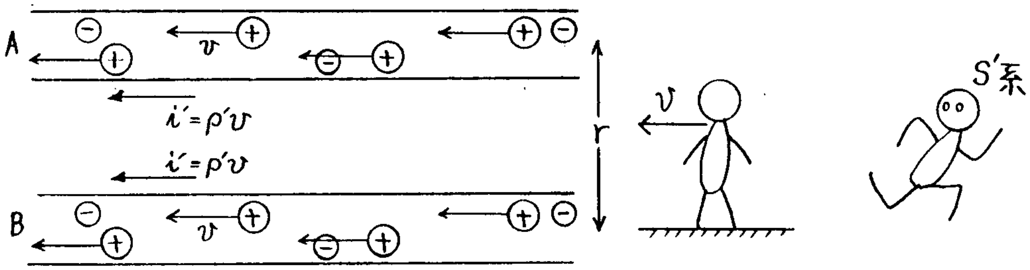
Ｓ系から見ると、Ａが受ける力はローレンツ力（電子が受ける。陽イオンは静止しているから力を受けない）だけです。Ａ，Ｂは帯電していないので、クーロン力は受けません。（クーロン力の合力がゼロと言ってもいい）

Ａが単位長さあたりに受けるローレンツ力（引力）は、$F=\mu_0 H i l$より、

$$F_{ロ} = \mu_0\frac{\rho v}{2\pi r}\cdot\rho v = \frac{\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{v^2}{c^2} \qquad \left(\because\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c\right)$$

となります。ローレンツ力というのは、まったく小さなものです。（これは大切）

■ 平行電流が受ける力を電子と共に運動する観測者が見ると



次に、電子と共に速さvで右方へ運動する座標系Ｓ’から導線Ａ，Ｂを見ます。電子は静止して見え、陽イオンは導線と共に左方へ速さvで運動します。相対論により、導線はこの左右方向にローレンツ収縮します。電荷は保存されますから、電荷の線密度が変化することになります。

陽イオンによる正電荷の線密度は大きくなり、$+\rho' = +\rho\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

電子による負電荷の線密度は小さくなり、　$-\rho'' = -\rho\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$　となって、

合計$\lambda = (+\rho') + (-\rho'') = \rho\dfrac{\dfrac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} > 0$　つまり、導線は正に帯電し、導線のまわりには電場ができます。

この結果、導線の間にはクーロン力$F_{ク}$（斥力）がはたらきます。

一方、陽イオンは左方に速さvで移動しているので、$\rho' v$の大きさの電流が左方に流れていることになるので、これがつくる磁場から陽イオンはローレンツ力$F_{ロ}$（引力）を受けます。（電子は静止しているからローレンツ力を受けない）

導線が単位長さあたり受けるクーロン力（斥力）は、

$$F_{ク} = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{\rho^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

注

導線が単位長さあたり受けるローレンツ力（引力）は、

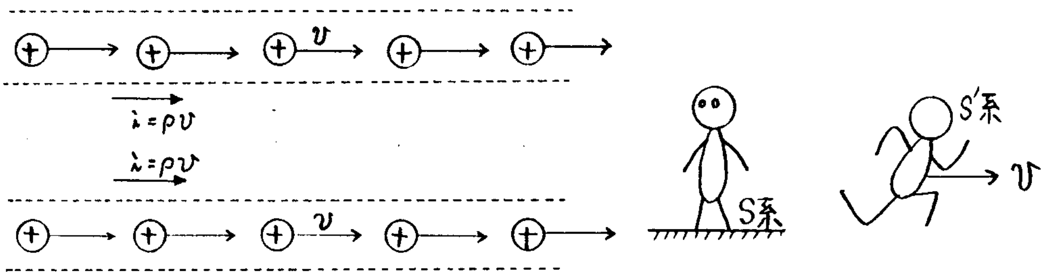
$$F_{ロ} = \mu_0\frac{\rho' v}{2\pi r}\cdot\rho' v = \frac{\rho'^2}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{v^2}{c^2} = \frac{\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{v^2}{c^2}$$

合力$F_{ロ}-F_{ク}$ ＝ 中略 $= \dfrac{\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\dfrac{v^2}{c^2}$　これは、さきに計算したＳ系から見たときに導線が受ける力とピタリ一致します。

つまり、相対性原理から当然のことではあるのですが、平行電流が受ける力は、どの慣性座標系から見ても同じです。ただ、座標系を変えると電場が現れたり消えたりするということ、言い換えれば磁気力と電気力は本質的には同じものである、ということには注意を向けるべきです。
電磁気の教科書で、ローレンツ力$=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ と書いてあるのはこういう事情によるのです。

■ 平行に運動する正電荷が受ける力を静止した観測者が見ると

では、小川さんの問題について考えてみましょう。まず、静止しているＳ系から見てみます。



導線の中（別に導線を考える必要もありませんが）には負電荷はなく、正電荷だけが存在し、これが右方へ速さvで運動しているとします。電荷の線密度はρとします。
導線が単位長さあたり受ける力は、クーロン力$F_{ク}$（斥力）とローレンツ力$F_{ロ}$（引力）があります。

$$F_{ク} = \frac{\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$F_{ロ} = \mu_0\frac{\rho v}{2\pi r}\cdot\rho v = \frac{\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\frac{v^2}{c^2}$$

$$合力\ F_{ク}-F_{ロ} = \frac{\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

ほとんどクーロン力（斥力）だけ、と言っても過言ではありません。ローレンツ力ってのは、ホントに弱い力なのです。

■ 平行に運動する正電荷が受ける力を正電荷と共に運動する観測者が見ると

正電荷と共に等速運動するS’系から見ると正電荷は静止しており、さきの議論（静止した負電荷の線密度）と同様に、正電荷の線密度は小さく見え、

$$\rho' = \rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ となっています。

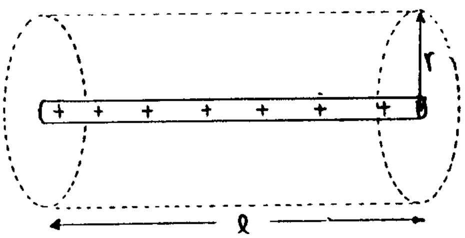
電荷は静止しているので磁場は存在せず、導線が単位長さあたり受ける力はクーロン力$F_{\text{ク}}$（斥力）だけで、

$$F_{\text{ク}} = \frac{\rho'^2}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$ これはS系で観測される力とピタリ一致します。

結局、小川さんの問題に対する答は、**『平行に運動する２つの正電荷の間には斥力がはたらき、離れていく』**ということになったわけです。めでたし、めでたし。あー、勉強になった。

そういえば、小川さんはすでにこれを実験で示す方法も開発されたそうです。素早いですねー。今度の例会がたのしみです。

注 直線上に分布した電荷が作る電場



電荷の線密度をρとする。

半径rで、長さl（十分長いとする）の円筒を電荷の分布した直線のまわりに考えて、ガウスの定理を適用する。

$$2\pi r l \times E = \frac{\rho l}{\varepsilon_0}$$ したがって、 $$E = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}$$