”rot”って何の回転？

村田憲治（加納高校）

■ rotのイメージがわかないからマクスウェル方程式もよく分からない

電磁気で出てくるマクスウェル方程式

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{cases}$$

この２つは、なんとかイメージがわきます。
つまり、『湧き出し』ってのは分かりやすいんですよね。

でも、この２つはどうもピンときません。
rot、つまり『回転』のイメージがわかないんです。
いったいベクトルの回転って何？

どんな教科書にも書いてあることですが、ベクトル場 $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ があるとき、

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$ であるわけですが、

どうしてA_zをyで微分するのか？

このマイナスはいったい何なのか？

だいたい、

$$(\mathrm{rot}\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

なんでこれが『回転』を意味するのかを説明してくれた大学のセンセーはひとりもいませんでした。

大学時代の先生は笑顔(!)をうかべながら、

「$\mathrm{rot}\vec{A}$は、ナブラベクトル$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$と$\vec{A}$のベクトル積ですねっ！」 なんて言って、

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

とかいう行列式にされて、結局のところベクトル解析でイジメられたっていう苦い記憶しか、僕にはありません。

でも、最近になって（あ～恥ずかしい）やっと少しイメージがわくようになったのです。

> **$\vec{A}$を流速のベクトル場と考えたとき、$\mathrm{rot}\vec{A}$は、流体の微少部分の回転の速さのことナノダ**
>
> （正確には回転の角速度ベクトル$\vec{\omega}$と$\mathrm{rot}\vec{A}$とは、$\dfrac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{\omega}$ の関係がある）

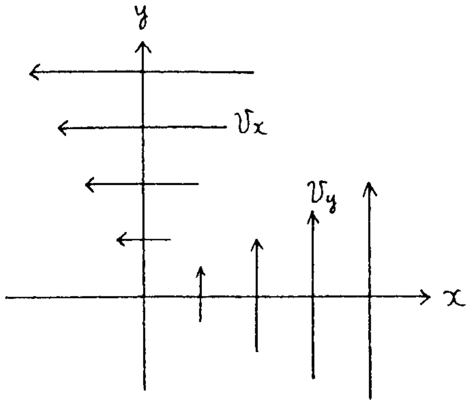
■ 流体の微少部分の回転の角速度を計算してみると

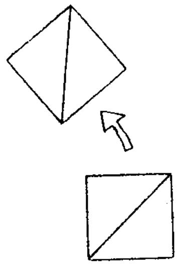
では、具体的にやってみましょう。

例えば、

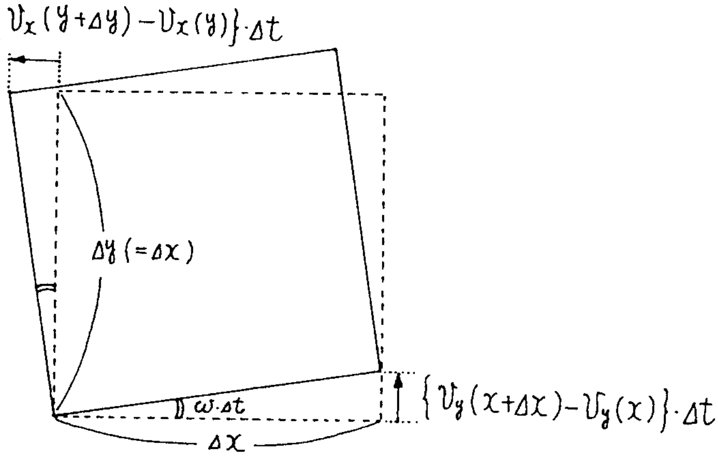
$$v_x = -ky$$
$$v_y = kx$$
$$v_z = 0$$

という流速のベクトル場があったとすると、流体の微少部分、一辺Δxの正方形は、





← こんなふうに
動くわけです。



図より、 $\omega\cdot\Delta t = \dfrac{v_y(x+\Delta x)-v_y(x)}{\Delta x}\cdot\Delta t \quad \Rightarrow \quad \omega\cdot dt = \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\cdot dt$ ……… ①

$$\omega\cdot\Delta t = -\frac{v_x(y+\Delta y)-v_x(y)}{\Delta y}\cdot\Delta t \quad \Rightarrow \quad \omega\cdot dt = -\frac{\partial v_x}{\partial y}\cdot dt \quad \cdots\cdots ②$$

①+②で、 $2\omega = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ 　☜なんと右辺は$(\mathrm{rot}\,\vec{v})_z$じゃないですか！

ωは、z軸のまわりの角速度だからω_zとおいて、

$$\boxed{\omega_z = \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\vec{v})_z}$$ ……… ③ ほらっ、rotって『回転』でしょう？

①式の $\dfrac{\partial v_y}{\partial x}$ は、v_yのx方向への勾配で、$\dfrac{\partial v_y}{\partial x} = k$ であり、

②式の $\dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ は、v_xのy方向への勾配で $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -k$ です。

微少正方形は、反時計まわりに回転し、これが正の向きですから、

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$ だからこのマイナスが現れてくるのです

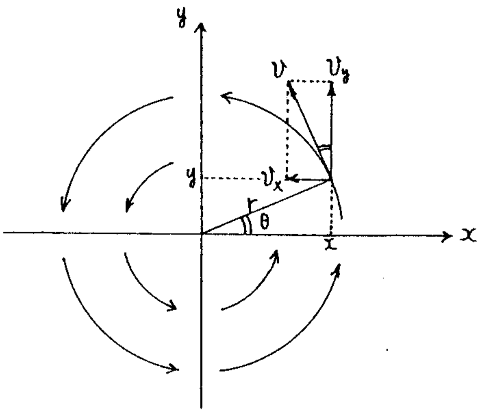
ところで、$\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = k - (-k) = 2k$ ですから

③は、$\omega_z = \dfrac{1}{2}(\mathrm{rot}\vec{v})_z = \dfrac{1}{2}\cdot 2k = k$ となっています。

■ 剛体的に回転する流体の流速ベクトルの場

実は、ここまで黙ってましたが（気がついてましたか？ こりゃまた失礼）、上のベクトル場は、一定の角速度ωで剛体的に回転する流体の流速ベクトルの場なのです。

つまり、$\boxed{v = r\omega}$ （流速vがrに比例） ってやつです。



$x = r\cos\theta$ ， $y = r\sin\theta$

$v_x = -v\sin\theta = -r\omega_z\sin\theta = -\omega_z y$

$v_y = v\cos\theta = r\omega_z\cos\theta = \omega_z x$

ね！

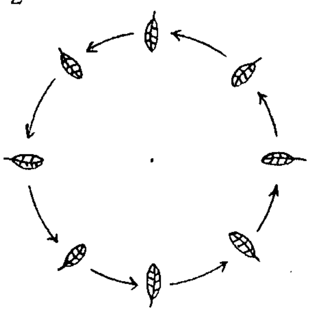
$(\mathrm{rot}\vec{v})_z = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z$ となり、

やはり、

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\vec{v})_z$$ となります。

剛体的に回転する流体の微少部分は、
流体と同じ角速度で『自転』しますものね。

$\dfrac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v}$ は、微少部分の自転の角速度なのです。



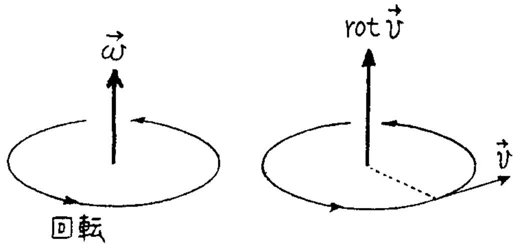
$\mathrm{rot}\,\vec{v} \neq 0$

こういう流速の場に、木の葉を浮かべたとすると、
右図のように、自転しながら回転するわけです。
こういう流速の場を『**渦あり**』といいます。

蛇足ですが、角速度ωもベクトルであって、
右図のような向きの関係がありますから、

$\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v}$ より、$\mathrm{rot}\vec{v}$ の向きも、

右図のような向きの関係をもっています。



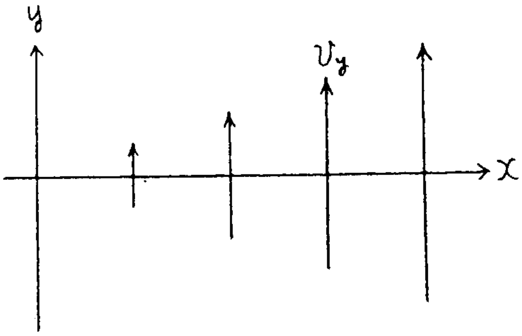
■ x軸方向に勾配をもつ流速ベクトルの場

先の例より易しいのですが、

流速のベクトル場が、

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= kx \\ v_z &= 0 \end{aligned}}$$

だったらどうでしょう？



$$(\mathrm{rot}\vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial y}}_{\downarrow\ \text{ゼロ}} = k$$ となります。

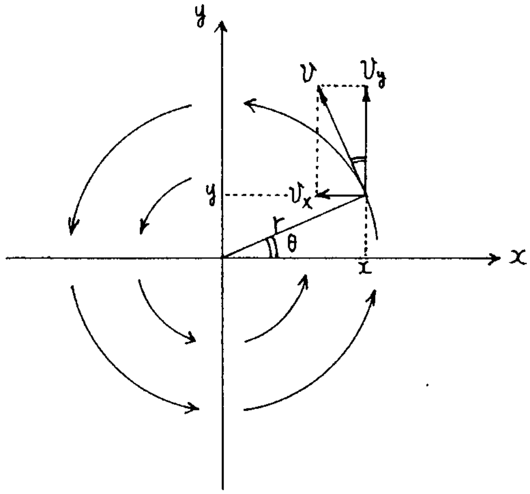
この流体中の微少部分（あるいは浮かべた木の葉）は、
角速度k／２で回転しながら、y正方向へ流されていきます。
この流れは、角速度k／２の回転流と同じなのです。

■ 流速がrに反比例する流速ベクトルの場

では、流速がrに反比例する場合を考えてみましょう。

つまり、$\boxed{v = \dfrac{k}{r}}$ である場合です。

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= -v\sin\theta = -\frac{k}{r}\cdot\frac{y}{r} = -\frac{ky}{x^2+y^2} \\ v_y &= v\cos\theta = \frac{k}{r}\cdot\frac{x}{r} = \frac{kx}{x^2+y^2} \end{aligned}}$$



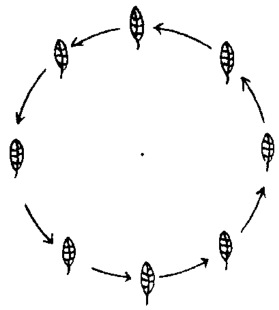
したがって、

$$(\mathrm{rot}\vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$= k\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \left(-k\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0$$ こういうのを**『渦なし』**といいます。

この流れに、木の葉を浮かべると、
右図のように、向きを変えずに回るわけです。
風呂桶の栓を抜いたときできる水の渦（『渦なし』の渦って
わけです。ははは）が、こういうタイプの流れです。
角運動量保存則 mvr ＝一定 より、

$$v \propto \frac{1}{r}$$ ですものね。



$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$

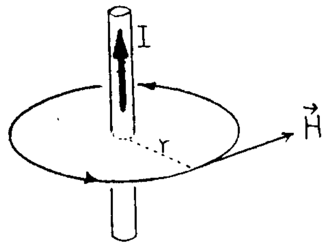
ＮＨＫ教育ＴＶで６月12日に放送された「やってみよう なんでも実験」という番組で、この渦に鳥の羽毛を落として渦の回転の様子を調べていましたが、向きを変えずに回転する羽毛が見事に撮影されていました。

それから、直線電流のつくる磁界

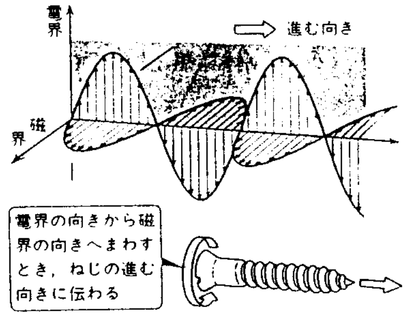
$H = \dfrac{I}{2\pi r}$ も、r に反比例しますから、

このベクトル場も $\mathrm{rot}\vec{H} = 0$

つまり、『渦なし』であるわけです。



■ 電磁波は、どのように進んでいくのか？



高校の物理の教科書には、こういう図が載っていますが、どういう具合に z 軸正方向に電磁波が伝わっていくのか、どうもピンときません。

でも、これまでやってきた rot のイメージと、マクスウェルの方程式

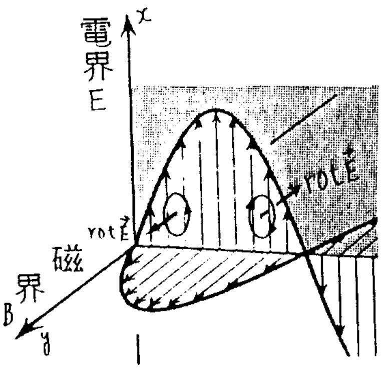
$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad と \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

から考えてみると、その感じがつかめます。

たとえば、

$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ の意味は、『$\vec{B}$の時間的変化が$\vec{E}$の渦を作りだす』ということですが、

原因と結果をひっくり返して言えば、『$\vec{E}$の渦があるところでは、$\vec{B}$の時間的変化がある』と言えるので、



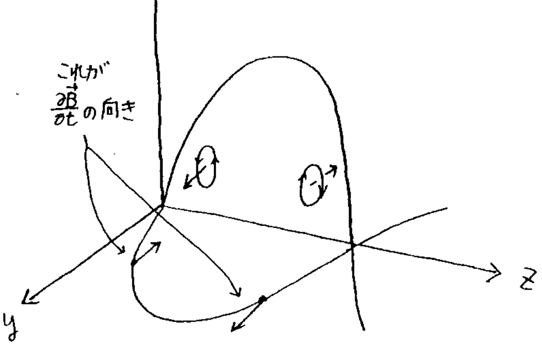
左図で、電界Eの渦（rot$E$）を調べてみると、

←こうなってるわけです。

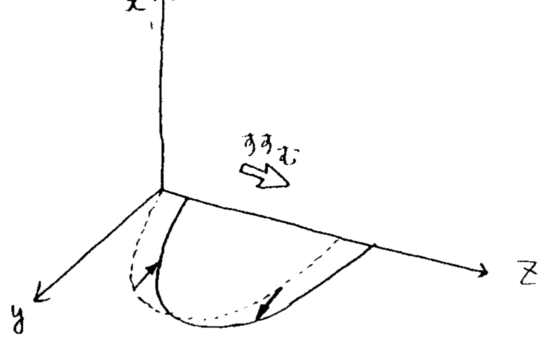
だから　$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ より、

$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ の向きと、$\mathrm{rot}\vec{E}$ の向きは逆だから

下図のようになって、



⇨



と、めでたく磁場は z 軸正方向へ進んでいることがわかるわけです。

同様に、電界$\vec{E}$の進む向きも　$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ から分かります。図を書いてやってみましょう。

【参考文献】長沼伸一郎；物理数学の直観的方法；通商産業研究社

（電磁波の進み方の説明のアイデアは、この本を参考にしました）