逆立ちゴマの力学

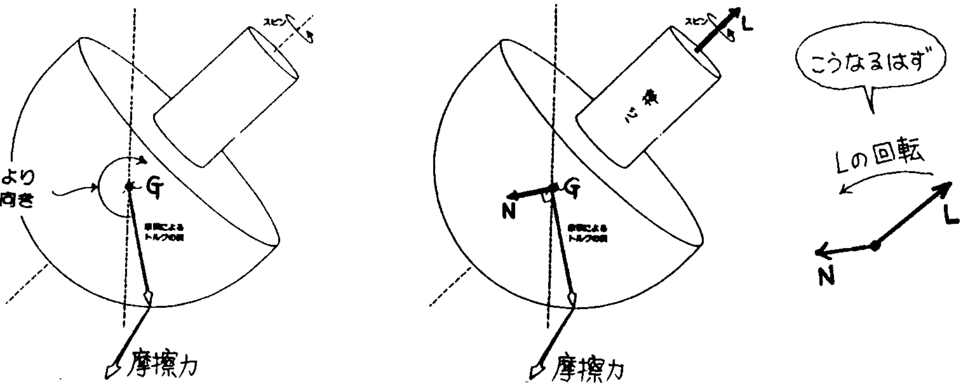
村田憲治（加納高校）

民芸おもちゃでよく見かける「逆立ちゴマ」は，物理の啓蒙書などでも，よく取り上げられているのですが，実際のところ何がどうなっているのか僕にはよく分かりませんでした。

ちょっとしたきっかけから，今回，真剣に追究してみよう考えました。（最近，コマに凝ってるんだよね）

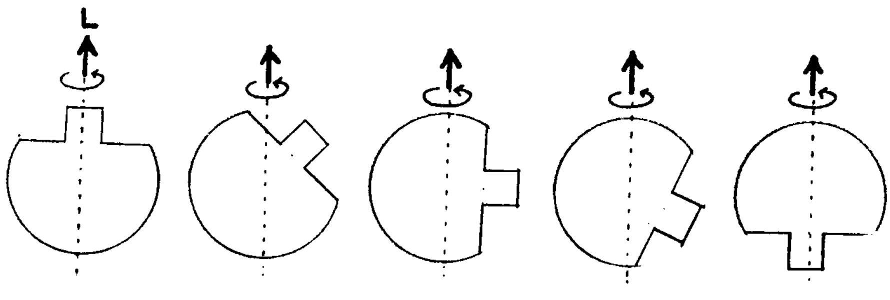
■ この図はなんかヘンだ

9月のサークル例会で秦野物理サークルの塚本さんにもらったラトルバックの資料（「サイエンス」1979年12月号の記事からのコピー）の中に逆立ちゴマの図が載っていました。この図がヘンなのです。これがきっかけでした。



① 角運動量Ｌと摩擦力によるトルクＮを書き込むと右図のようになるから，トルクによる回転の向きが逆です。つまり，この図ではコマの心棒は起き上がってくる（逆立ちしない）ことになってしまいます。これは普通のコマが，いわゆる「眠りゴマ」になるときのメカニズムなのです。

② なによりコマが心棒のまわりに回転しているってのがヘン。逆立ちゴマを回してみれば一目瞭然ですが，このコマは下図のように回転しているのです。

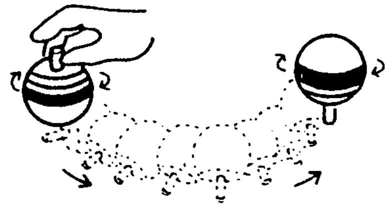


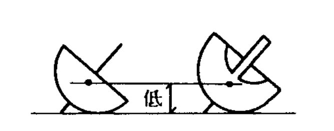
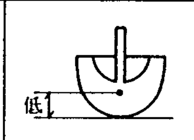
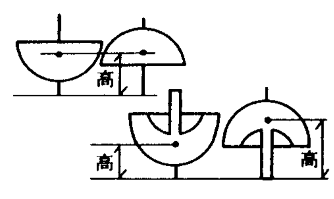
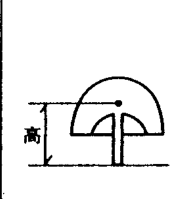
逆立ちゴマは『心棒のまわりに回転しているのではない』のです。「心棒」という形状に騙されてはいけません。心棒＝回転軸という固定観念がこの問題をわかりにくくしているのです。また，これは重要な点ですが，最初に与えた角運動量は最後まで保存されているのです。

■ コマには重心を高くしようとする性質がある？

物理の啓蒙書には「コマには重心を高くしようとする性質がある。」というような書き方がされている場合が多いようです。

確かに普通のコマは静止しているときより回転しているときの方が重心の位置は高いし，逆立ちゴマも逆立ちして回転しているときの方が正立して（静止して）いる時より重心の位置が高いのです。



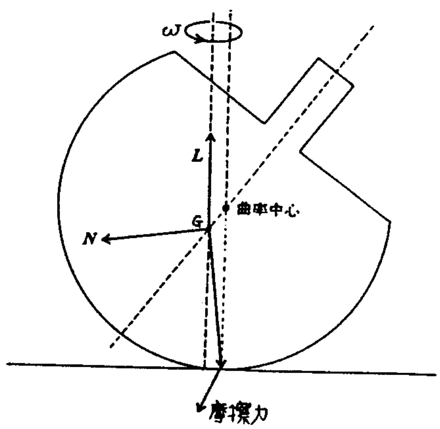
区分	普通のコマ	逆立ちコマ
静止		
回転		

でも，「そういう性質がある」では，ちょっと納得できません。ちゃんと力学的に説明できなきゃキモチワルイですよね。

■ コマに固定された座標系（回転する座標系）から見ると

まず，確認しておくべきことは，こういうことです。

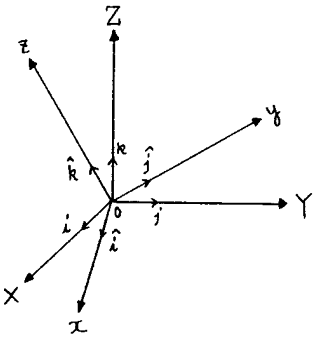
逆立ちゴマはほとんど球形をしていますが，曲率の中心と，コマの重心とは，ほんの少しズレています。回転軸は重心を通り床に鉛直ですが，コマは重心の真下で床と接しているのではなく，コマが床に接しているのは曲率中心の真下です。



さて，逆立ちゴマの角運動量が保存される理由は簡単です。上の図のように摩擦力の

モーメントは，だいたい水平の方向を向いていますが，この水平のモーメントもコマと同じ角速度ωで回転していますから，時間平均をとればゼロになるからです。

そこで問題は，『なぜ，剛体に対して回転軸が動いていくのか？』という点に絞られます。まず，回転する座標系から任意のベクトルを見るとどう見えるかということを考えてみましょう。



$O-XYZ$　静止座標系

$O-xyz$　剛体（コマ）に固定した座標系で剛体と共に角速度$\boldsymbol{\omega}$で回転する座標系

$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$　静止座標系の単位ベクトル

$\hat{\boldsymbol{i}}$，$\hat{\boldsymbol{j}}$，$\hat{\boldsymbol{k}}$　回転座標系の単位ベクトル

任意のベクトル量$\boldsymbol{A}$は、回転座標系から見て$\boldsymbol{A}=A_x\hat{\boldsymbol{i}}+A_y\hat{\boldsymbol{j}}+A_z\hat{\boldsymbol{k}}$ と表せます。（A_x，A_y，A_z）は、$\boldsymbol{A}$の回転座標系への正射影です。

$\boldsymbol{A}$の時間微分は

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\underbrace{\left(\frac{dA_x}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}+\frac{dA_y}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}+\frac{dA_z}{dt}\hat{\boldsymbol{k}}\right)}_{\text{以後、}\frac{\delta \boldsymbol{A}}{\delta t}\text{と書くことにする。}}+\underbrace{\left(A_x\frac{d\hat{\boldsymbol{i}}}{dt}+A_y\frac{d\hat{\boldsymbol{j}}}{dt}+A_z\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}}{dt}\right)}_{\text{座標系の回転により、単位ベクトルの方向が時間がたつにつれて静止系に対して変化するために生じた項}}$$ であり、

これは、回転座標系の各軸に対する$\boldsymbol{A}$の時間変化率

$\dfrac{d\hat{\boldsymbol{i}}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{i}}$　，　$\dfrac{d\hat{\boldsymbol{j}}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{j}}$　，　$\dfrac{d\hat{\boldsymbol{k}}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{k}}$　（×はもちろんベクトル積）　だから、

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\delta \boldsymbol{A}}{\delta t}+\boldsymbol{\omega}\times(A_x\hat{\boldsymbol{i}}+A_y\hat{\boldsymbol{j}}+A_z\hat{\boldsymbol{k}})$$

つまり、

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\delta \boldsymbol{A}}{\delta t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$$ となります。

これは、相当に有用な式で、$\boldsymbol{A}$を位置ベクトル$\boldsymbol{r}$にして、もう一度時間微分し、静止座標系における運動方程式に代入すれば、回転座標系の運動方程式が簡単につくれます。そこには、遠心力，コリオリの力もちゃんと姿を現します。（話がそれるので今回は省略）

さて、この式の$\boldsymbol{A}$を角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$にすると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{\delta \boldsymbol{L}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}$$

となりますが、逆立ちゴマはほぼ球形なので重心のまわりの３つの主慣性モーメントは、互いに等しいと考えて、$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$とおくと、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{\delta \boldsymbol{L}}{\delta t}$$

となります。

これを使って、角運動量とモーメントの関係式

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

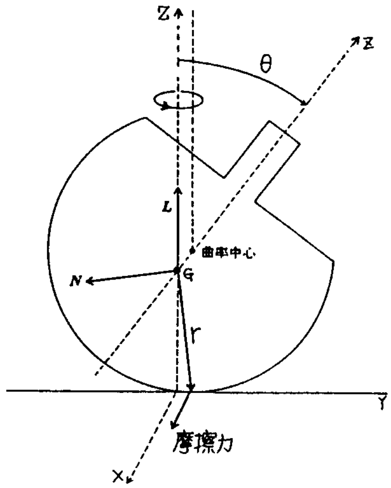
を書き直し、さらに成分で書くと、

$$\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_x = \frac{dL_x}{dt} = N_x$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_y = \frac{dL_y}{dt} = N_y$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_z = \frac{dL_z}{dt} = N_z$$

ここで、注意しなければならないのは、
$\boldsymbol{L}$が静止系に対する角運動量で、L_x, L_y, L_zは各瞬間の$\boldsymbol{L}$のx, y, z方向（これはコマに固定されてコマと共に回る）への正射影であることです。
この式は、これらの正射影のL_x, L_y, L_zが時間と共にどう変わっていくかを与えるものです。
これはオイラーの運動方程式を逆立ちゴマ用に書き換えたものです。



さて、摩擦力によるモーメント$\boldsymbol{N}$を近似的に水平方向とした右の図を用いれば、

$L_z = L\cos\theta$, $N_z = -N\sin\theta$ であるから

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z$$

に代入して、

$$L\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = N\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{N}{L}$$

逆立ちゴマ（ほぼ球形）の半径，質量，床との動摩擦係数をそれぞれ r, m, μとすれば、$N = \mu m g r$ であり、$L = I\omega$ であるから

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu m g r}{I\omega} > 0$$

したがって、θは次第に増加し、つまり心棒が下を向いていき（コマの重心は上に押し上げられ）、コマが逆立ちすることになるわけです。滑らかな床ではコマがなかなか逆立ちしない理由、コマの回転が落ちてきてから急に逆立ちする理由もこの式を見れば説明できます。

■ もう少し直観的に説明できないか？

ちょうど，ここまでの式をワープロでタイプし終わった頃，偶然にも２年生の生徒が物理準備室に自分の逆立ちゴマを持って遊びに来て（うちの物理準備室は，ほとんど生徒の遊び場になっている），「なんで逆立ちするのか説明してくれ」とせまってきました。正直言って困りました。もう少し直観的に説明できないでしょうか？（角運動量とモーメントの関係式くらいは，どうしても必要かなー）

もし簡単に説明するとしたら，

①静止系で見たとき，摩擦力のモーメントの時間平均はゼロだから，初めの角運動量は保存される。

②でも，コマに固定された回転座標系から見たとき，この摩擦力によるモーメントのために角運動量は，歳差運動を始めることになる。

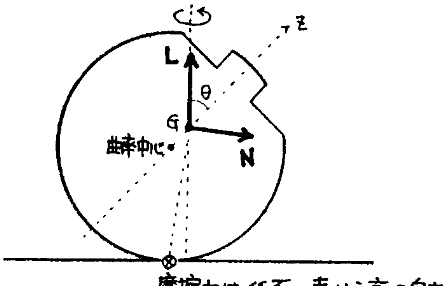
③ところが，やはり静止系では角運動量は保存されているから，結果としてコマ自体が角運動量に対して歳差運動(?)することになり，逆立ちへと向かう。

てなところでしょうか。うーむ，やっぱりスッキリしてないなー。

■ 重心の位置が違っていたら（蛇足）

右図のような位置にこまの重心があったら摩擦力によるモーメントが，今までの図と反対の向きになることがわかります。

これだと逆立ちせず，心棒は上を向いてきます。



摩擦力は紙面の表から裏の向き

身近なもので逆立ちゴマを作ってみると面白いですよ。例えば，ガチャポンで出てくるプラスチックの球形容器の内側に，粘土をくっつけるだけで立派な逆立ちゴマになります。

【参考文献】

力学 －新しい視点にたって－　（V. D. バーガー・M. G. オルソン 共著　培風館）

力学 I －質点・剛体の力学－　（原島　鮮　著　裳華房）

おもしろ力学　（橋本英文　著　コロナ社）

☆逆立ちゴマは，柳ケ瀬通りにある民芸品の店「みの吉」で手に入れました。
　大型の逆立ちゴマはなかなかの迫力です。