ジャンピング・トーイは重い頭を上にするとなぜ高く飛ぶのか？

村田憲治（加納高校）

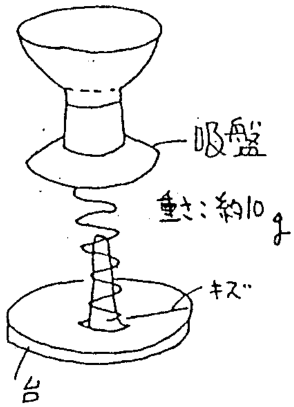
岐阜物理サークルニュース集 vol. 6　p674の「ジャンピング・トーイは使いものになる！」の計算はアレでいいのだろうか？　なんてことを小川さんと話していて、少し計算をしてみる気になりました。

ちょうど、近々出版予定（？）のサークルの本「のらねこの挑戦（仮題）」に掲載予定の石川さんの論文の中にある『重心系でエネルギーを考える』やり方が有効であると思われたので、さっそく利用してみたわけです。（と、さりげなく本の宣伝もする）

でも何が問題になっているのか皆さんに分かってもらうために、上記の記事を少々長くなりますがそのまま再掲載します。なにしろ、かなり以前の議論なので、お忘れの方もあるでしょうから・・・。

小川さん自身が「変ではないか？」と言うのは、計算２の(6)式，(7)式の右辺です。ここらあたりに注目しながら以下の記事を読んでみてください。

▲ ジャンピング・トーイは使いものになる！

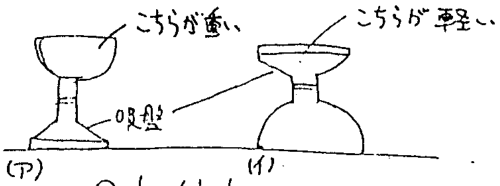


〝ジャンピング・トーイ〟なる面白いおもちゃがあります。（図）吸盤がはずれると1メートル程もピョンととびあがるのです。これを使った実験については「理科教室」'84. 9月号に藤本光世氏（長野高校）が紹介していますので そちらに譲ることにしましょう。

このジャンピング・トーイはサークルで入手してあります。

先日、長野県に行ったとき 当の藤本さんから話しを聞き、「これは使いものになる！」と直感した長野さんが すぐに注文したのです。（360個、ダンボールにいっぱい、50円／一個 でおわけします。）（残念売り切れたそうです。県教研で）

サテ、右の問題はどうでしょうか？



① どっちが高くとぶ？
これについては、後で説明

バネにたくわえられるエネルギーは同じ。
高さが違えば、エネルギーはどこへ？

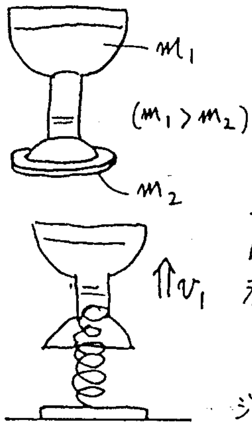
〈予想〉

ア. 重い方を頭にした方がよくとぶ。
イ. 軽い方を 〃
ウ. 両方とも同じ。

結果はやってみればすぐにわかります。正解は(ア)なのです。

何故なのか？ ここから長々とした討論が始まりました。

(計算1)



バネ定数をk，変位をxとする。
バネにたくわえられる弾性エネルギーは： $\frac{1}{2}kx^2$

バネの台が床にあるとき、重い頭が上向きに得る速度v_1は、バネのエネルギーを全部受け取ると考えると、

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \quad \cdots\cdots (1)$$

ジャンピング・トーイが床をはなれて全体がとび上がる時、質量中心の速度をv_Aとすると、運動量保存より

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_A \quad \cdots\cdots (2)$$

全体を逆にするとき

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \quad \cdots\cdots (3)$$

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_B \quad \cdots\cdots (4)$$

(1)〜(4)より $v_A : v_B = \sqrt{m_1} : \sqrt{m_2} \Rightarrow v_A > v_B$

よって (ア)が答となる！

最初は「材質のちがいだ」とか「力積のちがいだ」とか言うような直感的な意見が出されました。しかしとにかく計算してみようということになりました。

左の(計算1)を黒板で説明し始めると、途中から次々に横やりが入ります。「だまれ〜ッ！ まずは説明を聞け！」とどこかの授業風景、みたいな言葉がとび出す程、議論は白熱します。

(計算1)で重い方を頭にした方がよくとぶという結論は導かれたかに見えます。

しかし問題は残ります。

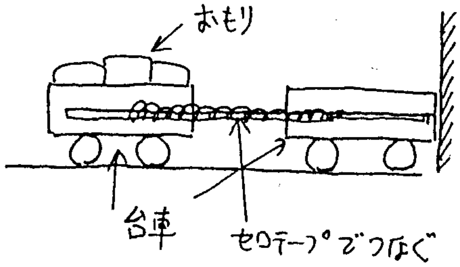
「バネの弾性エネルギーを全部ジャンピング・トーイが受け取ると仮定しているのに、とぶ高さ(重力の位置E)がちがうという結論は自己矛盾だ！ じゃ、エネルギーはどこへ行ってしまったの？」

「それは…… たぶん とび上がっていく途中も バネは振動しているはずだから、バネの弾性エネルギー として残っているんじゃないか」「すると（計算1）は前提がおかしいのだから、（つまり 式(1),(3)は成立しない）意味がないヨ」

「いや、あれはあれでいいんだ！ バネの弾性エネルギーは、バネののびが自然長になったときには 全て運動エネルギーになっている。もちろん、重力の位置エネルギーは今、無視しているヨ」……（ワイワイ）……

「では、頭を重くした方が（高くとぶのだから）残る弾性エネルギーが少ないっていうわけネ。どうして？」「ウーン！ どうしてだろう？ 誰か……どう？」

「実験してみようよ。ジャンピング・トーイでは現象がはやすぎるから、台車を使って……」それから実験のideaで又 ワイワイ……



結局、右の様な装置を作りました。台車に圧縮バネをつけ、真ん中でつなぎます。圧縮しておいて手をはなすと、台車は"いも虫"のような振動をしながら左へ進みます。図の様に一方におもりをのせ、ジャンピング・トーイと同様に状態にして実験します。この状態だと、重力の位置エネルギーは考えなくてすむので ウンとわかりやすくなります。（サスガ！ みんなのideaってすごい！！）

実験結果はバッチリ！ 予想通り おもりを積んだ台車を前にした時の方が振動はすぐ止まり、ウンと遠くまで走ります。『おもり台車』が前にある場合には、軽い台車をぐいぐい引っぱるようにつき進んでいくのに対して、逆の場合には軽い台車がぐっと前に行きすぎてから『おもり台車』に引きもどされるように動きます。「ホー、こりゃいい。ちがいがはっきりわかるね。」

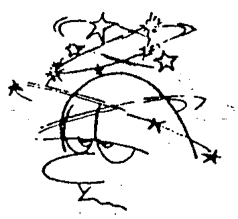
「これは（『おもり台車が前にあるときには）ガンコおやじがいやがるやんちゃ息子を引っぱっていくみたい ハハハ」

「この場合、重心は等速度運動するんだろう？ もちろんまさつはないとしてネ。」

「じゃ、さっきの（計算1）はあれでいいのかなあー」「重心の速度の比を出すまではいいんじゃないかなあー．それから先、すべてが運動エネルギーになるんじゃなくて、弾性エネルギーの部分が残る．そのエネルギーを計算してみよう」

「右の(計算2)で明らかな様に、重い頭の場合の方が残る弾性エネルギーが少さいんだな。」

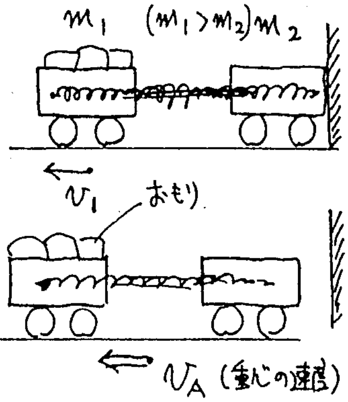
「そのことは、力でイメージ的に考えるとこんな風になるのかな。
軽い頭の場合、最初バネから得る速度v_2は大きい。しかし、自然長の所を通り過ぎてから、下にある重い部分を引っぱり上げなければならないのだから、そのためにたくさんのびなければならない……」



「ボワ　ン」

計算2：

重心の速度v_Aとv_Bの比を出すまでは、計算1と同じ。



$$v_A : v_B = \sqrt{m_1} : \sqrt{m_2}$$

$$\therefore\ v_B = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\, v_A \quad \cdots\cdots (5)$$

『おもり台車』が前のときと後のときとで、弾性エネルギーとして残る部分は、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_A^2 = \frac{1}{2}kx_A^2 & (x_A\text{は変位}) \cdots\cdots (6) \\ \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_B^2 = \frac{1}{2}kx_B^2 & (x_B\text{も〃}) \cdots\cdots (7) \end{cases}$$

(6)−(7)：$\frac{1}{2}(m_1+m_2)(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$

(5)を代入：$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_2-m_1}{m_1}\right)v_A^2 = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 \quad \cdots\cdots (8)$

$m_1 > m_2$ より　(8)式 < 0

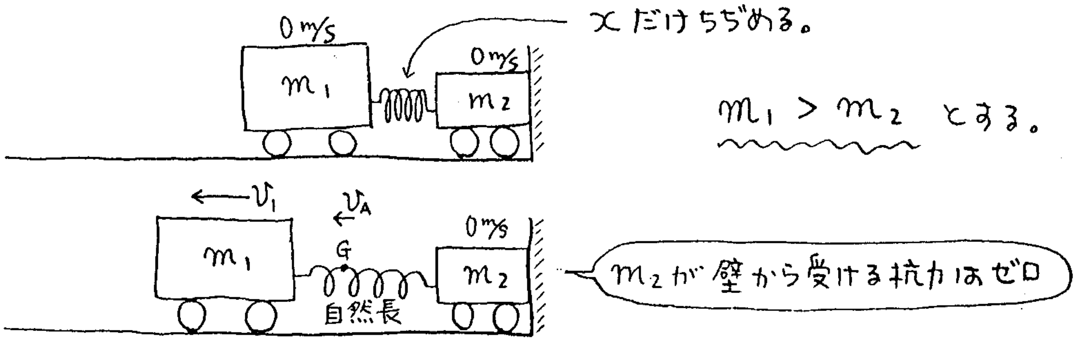
つまり残る弾性エネルギーは『おもり台車』が前にあるときの方が小さいことを示している。

ジャンピング・トーイの場合には、これに重力の位置エネルギー分が入ってくるが、基本的には同じ。

(6)式，(7)式の問題点は、初めにばねにたくわえられていた弾性エネルギーと物体系の重心の運動エネルギーの差をばねの弾性エネルギーとおいているところです。ミスとは言えないと思いますが、x_A，x_Bの値もはっきりしないのでこの点を明らかにしたいところです。

m_1とm_2は系の重心（等速運動する）を固定点として単振動しますから、この等速運動する座標系でエネルギーをキッチリ計算してみようと思います。

■重い頭を前にすると・・・



（図１）

ばねが自然長になったときのm_1の速さv_1は、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 \qquad \therefore\ v_1 = \sqrt{\frac{kx^2}{m_1}}$$

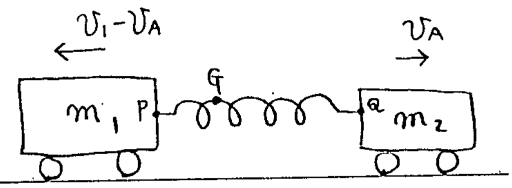
重心Gの床に対する速度v_Aは、運動量保存則より、

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v_A \qquad \therefore\ v_A = \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{kx^2}{m_1}}$$

図１の下図のばねは自然長なので、ばねの弾性エネルギー＝０Ｊ です。

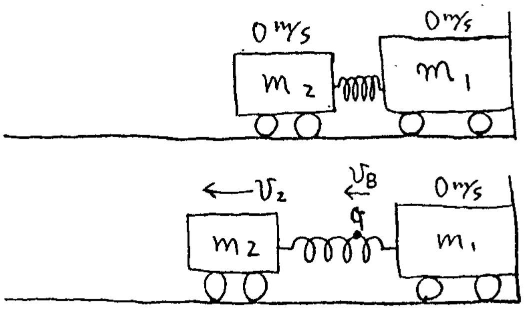
m_1とm_2は、重心Ｇに対する運動エネルギーを持っており、この後それぞれＧを固定点として単振動します。

（図2）



（m_1につながっているばねは $\overline{PG}$
m_2 〃 $\overline{QG}$）

■軽い頭を前にすると・・・



先の計算と同様で、

$$v_2 = \sqrt{\frac{kx^2}{m_2}}$$

$$v_B = \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{kx^2}{m_2}}$$

内部に残るエネルギーは、

$$\boxed{\frac{1}{2}kx^2 \times \frac{m_1}{m_1+m_2}} \quad \cdots\cdots（イ）$$

となります。

$m_1 > m_2$ ですから、（イ）＞（ア）となるので、重い頭を前にした方が、内部に残るエネルギーが少ない（ジャンピング・トーイなら高く飛び上がる）ことが分かります。

■参考までに・・・

ニュース集（6)式 の左辺（物体系内部に残るエネルギー）

$\dfrac{1}{2}kx^2 - \dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v_A{}^2$ に、 $v_A = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\dfrac{kx^2}{m_1}}$ を代入すると、

$$\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{kx^2}{m_1}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx^2 \cdot \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 \times \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

となり、（ア）式と一致します。

この方が速く結果に到達しますが、先にあげた「座標系の変換とエネルギー保存」という点に注目してモタモタ計算したほうが、教育的だとは思いませんか？