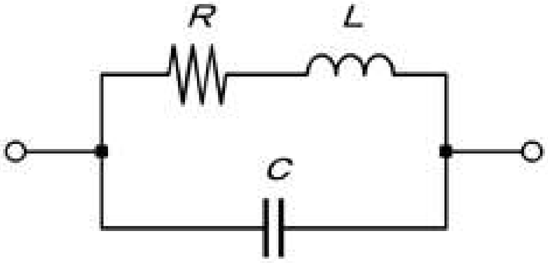
インピーダンスの計算は複素平面で

村田憲治＠関高校（非常勤講師）

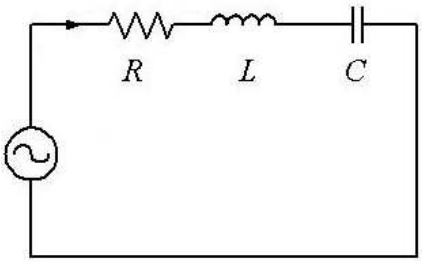
定年退職後，週８時間 アルバイト(非常勤講師)をしているのですが，ヒマな時間がたっぷりあるので，４月に「第１級アマチュア無線技師」の国試を受けてみました。
そしたら，「無線工学」という試験科目のなかに，下図のような回路のインピーダンスを計算する問題が出てきました。



そういえば，高校物理の教科書にはRLC の単純な直列や並列のインピーダンスを求めさせる問題はありますが，こういうヘンなのはありません。どうやったらうまく計算できるのでしょうか。

■複素平面を使ってＲＬＣ直列回路のインピーダンスZを計算する

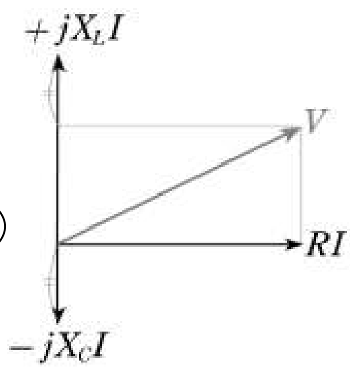
大昔，「R,L,C を含む交流回路は複素平面を使って計算するのだ」ということを教わった記憶があるので，思い出しながらやってみましょう。



まずは簡単なところで，RLC の直列回路です。
コイルのリアクタンスを$X_L (=\omega L)$，コンデンサのリアクタンスを$X_C (=\dfrac{1}{\omega C})$としましょう。

各素子を流れる電流Iは共通で，各素子にかかる電圧の和が電源電圧Vになります。

Rにかかる電圧の位相は電流Iと同じで，コイルにかかる電圧は電流よりπ/2 進んでいて，コンデンサにかかる電圧は電流よりπ/2 遅れているから，複素平面で電圧ベクトルの図を描くと右図のようになって，



$$
\begin{aligned}
V &= RI + jX_L I - jX_C I \\
&= (R + jX_L - jX_C) I \\
&= ZI
\end{aligned}
$$

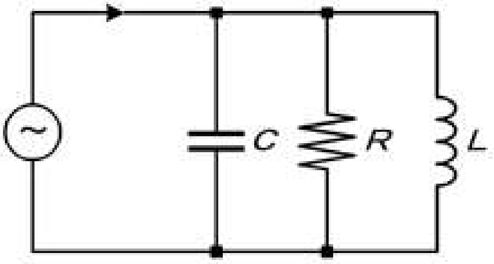
$$\therefore\ Z = R + jX_L - jX_C$$

この式が大切

Zの大きさは，$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$　となります。

数学では虚数はiを使いますが，電子工学系の世界では電流と間違わないようにjを使うのが普通みたいです。(物理学系の世界だとjは電流密度に使いますが･･･)
いまの図で，縦軸が虚軸ですが，この程度の話だと，虚数を使う意味(便利さ)が全然感じられません。

■複素平面を使ってＲＬＣ並列回路のインピーダンスZを計算する



では次に，RLC 並列回路をやってみましょう。

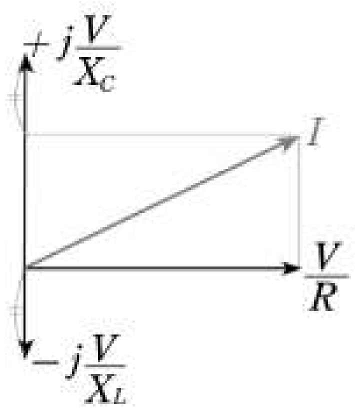
各素子にかかる電圧Vは共通，各素子に流れる電流の和が回路を流れる電流Iになります。
Rに流れる電流の位相は電圧Vと同じで，コイルに流れる電流は電圧より π/2 遅れていて，コンデンサに流れる電流は電圧 π/2 進んでいるから，複素平面で電流ベクトルの図を描くと右図のようになって，

$$I=\frac{V}{R}-j\frac{V}{X_L}+j\frac{V}{X_C}$$

$$=V\left(\frac{1}{R}-j\frac{1}{X_L}+j\frac{1}{X_C}\right)$$

$$=V\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{jX_L}+\frac{1}{-jX_C}\right)$$

$$=\frac{V}{Z}$$



$$\therefore\ \frac{1}{Z}=\frac{1}{R}+\frac{1}{jX_L}+\frac{1}{-jX_C}$$

この式に注目！

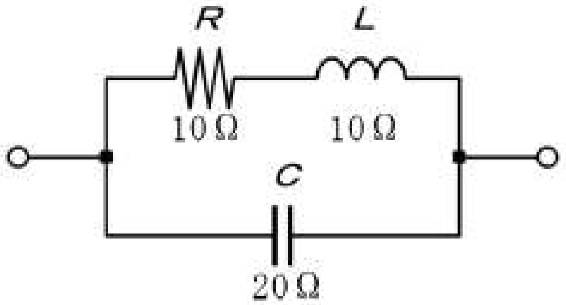
Zの大きさは(Zの逆数は)，$\frac{1}{Z}=\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2}$ となります。

ここまでの計算で分かったことは，

コイルは jX_L［Ω］，コンデンサは $-jX_C$［Ω］としてやれば， オーム抵抗 R［Ω］の合成と同じ計算をすることができる。

ということです。並列回路の計算をしてみて，気づくことですね。

■はじめの問題をやってみましょう



具体的に，

R=10Ω，X_L=10Ω，X_C=20Ω　として

インピーダンスZを計算してみます。

RとLは直列なので，ここは単純な和で，$10+j10$ Ω

これと $-j20$ ΩのコンデンサCとの並列なので，インピーダンスZは，積／和で，

$$Z=\frac{(10+j10)\times(-j20)}{(10+j10)+(-j20)}$$

$$=\frac{-j200+200}{10-j10}$$

$$=\frac{-j20+20}{1-j}$$

$$=\frac{-j20+20}{1-j}\times\frac{1+j}{1+j}$$

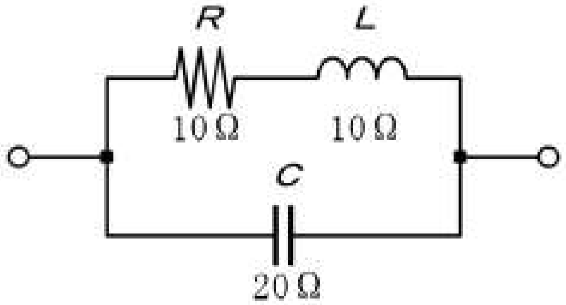
$$=\frac{-j20+20+20+j20}{1-(-1)}$$

$$=\frac{40}{2}$$

$$=20\ \Omega$$

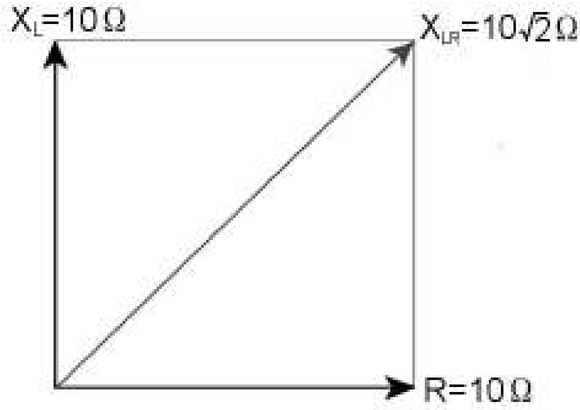
虚部がキレイに消える例ですが，虚数jを使うとこうやってカンタンに計算できることがわかります。これは便利。

■ “高校物理”的にこの問題を計算すると

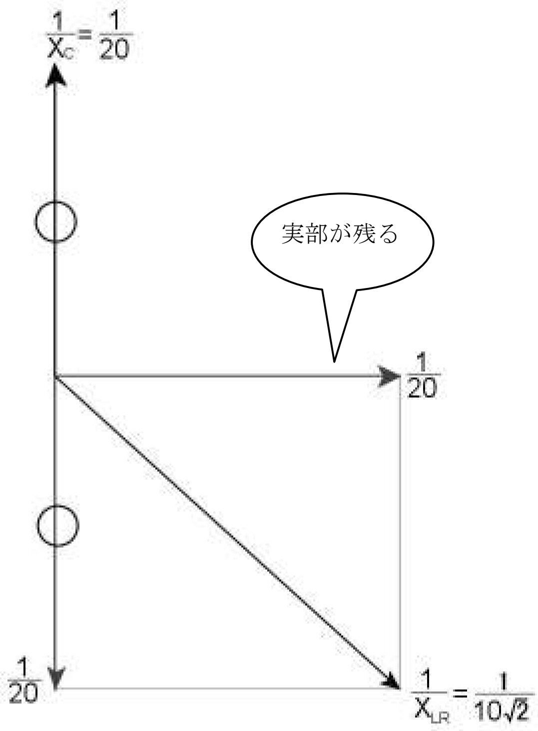


試しに，”高校物理”的にこの回路のインピーダンスを求めてみましょう。

まず，R と L の直列部分については，右のような作図から，
合成抵抗 X_{LR} は，大きさ $10\sqrt{2}$ Ω となります。



この $X_{LR}=10\sqrt{2}$ Ω と $X_C=20$ Ω の並列は，右下のような作図になって，
虚部が消え，実部の 1/20 が残りますから，全体のインピーダンス Z は
20Ω となることが分かります。
うーん，やっぱり虚数 j を使って機械的に計算したほうがラクかも。



あ，ちなみに「第１級アマチュア無線技士」の国試は無事合格しました(^^)v

http://physics.atnifty.com/