電場のする仕事は“気体の膨張”のアナロジーで

村田憲治@山県高校

　先日，ある学校の先生から「ちょっと聞きたいことがあるんだけど」という電話があって，久々に物理の計算をしてみたら面白いことに気がつきました。

■ コンデンサの極板が大きくなると静電エネルギーは小さくなる

　電話の内容はこうです。

「問題演習をやってて生徒に質問されたんだけどね。充電後，電池から切り離されたコンデンサの極板の面積Sが大きくなるっていう設定の問題なんだ。極板間隔dを広げるっていう問題がよくあるけど，あれの類題と云ってもいいのかな。それでね，面積Sが大きくなるとコンデンサの静電エネルギーが小さくなるんだよな。初めのエネルギーと，あとのエネルギーを計算してみればすぐ分かることなんだけどね。それで，生徒は『どうしてエネルギーが減るんだ』って言うわけだよ」

「ははあ，コンデンサが仕事をするんでしょうね。扇子みたいな極板だったら，極板上の電荷同士の反発力で扇子(極板)は勝手に開きますよね」

「そう，僕も"扇子"で考えたんだ。それはいいんだけど，その仕事の大きさをきちんと計算したいんだなあ。(初めのエネルギー)−(あとのエネルギー)なんていう結果論じゃなくて，たとえば力×変位みたいな形で計算したいんだよ」

「う～ん，どうしたらいいのかなあ。僕もそういう世界からしばらく遠ざかってますからねえ(^_^;)」

「なにかうまい方法を思いついたら教えてくれないかな。FAX でも電話でもいいから」

■ 極板間の電場が仕事をするから静電エネルギーが減少するのだ

　電話を切って考えました。

　「電荷同士の反発力で力学的に計算するなんてちょっと無理っぽいよなあ･･･。そういえば電気力線同士も反発するよね。そのセンはどうだろ。あっ，電場の応力で計算すればいいんだ。電場が仕事してるんだ」

こう気がついて計算を始めました。結論をひとことで言うと，次のようになります。

極板間の電場の応力$\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$による仕事によってコンデンサの静電エネルギーは減少する。 これは気体が断熱膨張して内部エネルギーが減少するのとよく似ている。

■ 電場の応力は〈気体の圧力〉みたいなもの

コンデンサの静電エネルギーUは,

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0\frac{S}{d}\cdot E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\times Sd$$ で,

Sdは,極板間の体積ですから,$\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$は電場に蓄えられているエネルギーの密度で,単位は[J/m^3]

ですが,この単位は[N/m^2]と同等ですから,$\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$は電気力線同士の反発による電場の応力(圧力)

である,ともいえます。

ですから先のコンデンサの問題は,電場の応力を“気体の圧力”に対応させて,気体が膨張して気体の内部エネルギーが減少する話に例えて説明することができそうです。

またこのコンデンサの問題では,極板の面積が大きくなるにつれて電場Eが小さくなる(つまり電場の応力$\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$も小さくなる)ので,気体でいえば“断熱膨張”みたいなものをイメージすればよいでしょう。

■ “気体の膨張”をイメージしながら計算してみましょう

コンデンサの極板の面積が$S\to2S$の2倍になったとしてみましょう。電気量Qは不変ですから,

はじめのエネルギーUは,$U=\dfrac{Q^2}{2C}=\dfrac{dQ^2}{2\varepsilon_0S}$

あとのエネルギーU'は,$U=\dfrac{Q^2}{2C'}=\dfrac{dQ^2}{2\varepsilon_0\cdot2S}=\dfrac{dQ^2}{4\varepsilon_0S}$ なので,

$$U-U'=\frac{dQ^2}{2\varepsilon_0S}-\frac{dQ^2}{4\varepsilon_0S}=\frac{dQ^2}{4\varepsilon_0S}$$ ← これだけ減少します。

ではいよいよ,電場の応力(圧力)による「電場がした仕事」を“気体の膨張”をイメージしながら計算してみましょう。つまり気体の圧力P×体積増加$\varDelta V$と同じ計算です。

極板の面積が$\varDelta S$だけ増加したときの仕事$\varDelta W$は,

$$\varDelta W=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\times d\varDelta S$$ ですが,$E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0S}$ なので,

$$\varDelta W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{{\varepsilon_0}^2 S^2} \times d\varDelta S = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\varDelta S}{S^2}$$

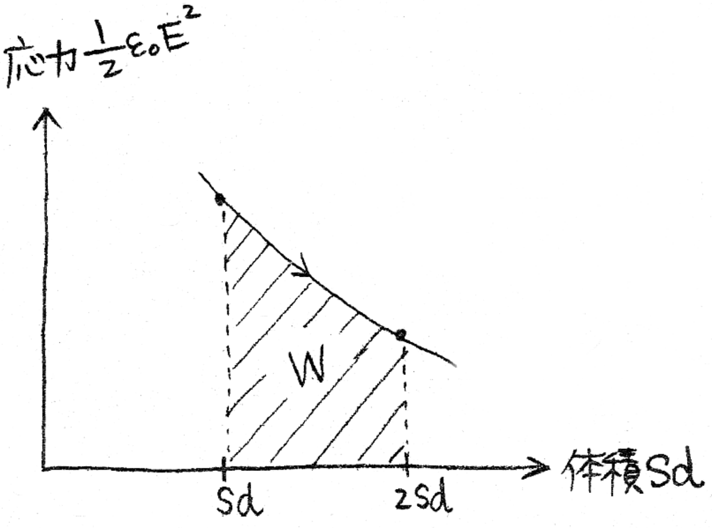
したがって，極板の面積が $S \to 2S$ と大きくなる際に電場がする仕事 W は,

$$W = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0}\int_S^{2S} \frac{1}{s^2} \mathrm{d}s$$

$$= \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{s}\right]_S^{2S}$$

$$= \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0}\left\{\left(-\frac{1}{2S}\right) - \left(-\frac{1}{S}\right)\right\}$$

$$= \frac{dQ^2}{4\varepsilon_0 \mathrm{S}}$$ ←先の計算結果と一致



僕たち物理の教員は，授業を進めるときにはいつも“良いアナロジー”はないかと探しているような気がします。今回のこれは結構イケてると思うのですがどうでしょうか。

murata@straycats.net

http://physics.omosiro.com/